РОСЖЕЛДОР
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Ростовский государственный университет путей сообщения»
(ФГБОУ ВО РГУПС)
Тихорецкий техникум железнодорожного транспорта
(ТТЖТ – ФИЛИАЛ РГУПС)

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ МАТЕМАТИКА ДЛЯ СТУДЕНТОВ 1 КУРСА

для специальности

08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений

2023 г.

РАССМОТРЕНА
цикловой комиссией №3
протокол №10 от «20» 06 2023г.
Председатель ЦК ______Т.А.Бурлакова

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора по УР
__________Н.Ю.Шитикова
«20» 06 2023г.

Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям по дисциплине «Математика» для студентов 1 курса для специальности 08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений

Пособие содержит рекомендации по подготовке к практическим занятиям по дисциплине «Математика». По каждой теме содержится краткий теоретический материал, образцы решения и оформления заданий, вопросы для самопроверки и задания для самостоятельного решения.

Организация - разработчик: Тихорецкий техникум железнодорожного транспорта – филиал Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Ростовский государственный университет путей сообщения» (ТТЖТ – филиал РГУПС)

Разработчики:
Моисеева С. А., преподаватель ТТЖТ - филиала РГУПС,
Ляув Н.А., преподаватель ТТЖТ - филиала РГУПС,
Мошура К.Г., преподаватель ТТЖТ - филиала РГУПС,
Сухоруких О.А., преподаватель ТТЖТ - филиала РГУПС.

Содержание

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям по дисциплине «Математика» предназначены для студентов 1 курса.

Основная задача образования заключается в формировании творческой личности специалиста, способного к саморазвитию, самообразованию, инновационной деятельности. Решение этой задачи вряд ли возможно только путем передачи знаний в готовом виде от преподавателя к обучающемуся. Необходимо перевести обучающегося из пассивного потребителя знаний в активного их творца, умеющего сформулировать проблему, проанализировать пути ее решения, найти оптимальный результат и доказать его правильность. Следует признать, что практические занятия являются не просто важной формой образовательного процесса, а должны стать его основой.

Практические занятия проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний обучающихся;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- развития познавательных способностей и активности обучающихся: самостоятельности, ответственности и организованности, творческой инициативы;
- формирования самостоятельности мышления, способности к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации.

Учебное пособие содержит рекомендации по подготовке к практическим занятиям, включая:

- теоретический материал, изложенный как справочный материал;
- образцы решения типовых заданий;
- вопросы для самопроверки;
- задания для самостоятельного решения.

Методические рекомендации помогут студентам в организации систематической работы для приобретения опыта математического мышления и овладения избранной специальностью, для которой математические знания являются базовыми.

Тема 1
Повторение курса математики основной школы
Краткие теоретические сведения

Число - одно из основных понятий математики, позволяющие выразить результаты счёта или измерения.

Когда-то численность множества не отделялась от других его качеств, и для того, чтобы сравнить два множества, их элементы располагали друг против друга но потом оказалось, что удобнее сравнить все множества с одним и тем же множеством-посредником. Так как пальцы были всегда при себе, то и стали считать по пальцам.

А потом появились особые названия для чисел - сначала для небольших, а потом для больших.

Но записывать такие громадные числа ещё не умели. Это стало возможным только после того, как индийскими математиками была придумана цифра нуль и ею стали обозначать отсутствие единиц в разрядах десятичной записи числа.

Цифры – условные знаки для обозначения чисел.

Изучение математики начинается с натуральных чисел, т.е. с чисел 1, 2, 3, 4, 5,…. При сложении и умножении натуральных чисел всегда получаются натуральные числа. Однако разность и частное натуральных чисел могут не быть натуральными числами.

Дополнением натуральных чисел нулем и отрицательными числами (т.е. числами, противоположными натуральным) множество натуральных чисел расширяется до множества целых чисел, т.е. чисел 0, ± 1, ± 2, ± 3, ….

При сложении, вычитании и умножении целых чисел всегда получаются целые числа. Однако частное двух целых чисел может не быть целым числом.

При выполнении четырех арифметических действий (кроме деления на нуль) над рациональными числами всегда получаются рациональные числа.

Бесконечную десятичную дробь 0,3333… называют *периодической*, повторяющуюся цифру 3 – ее *периодом*. Периодическую дробь 0,333… коротко записывают так: 0,(3) ; читается: «Ноль целых и три в периоде».

Периодическая дробь – это бесконечная десятичная дробь, у которой начиная с некоторого десятичного знака повторяется одна и та же цифра или несколько цифр – период дроби.

Если **бесконечная десятичная дробь** непериодическая, то она не является рациональным числом. Например, дробь 0,101001000100001…, в которой после первой цифры 1 стоит один нуль, после второй цифры 1 – два нуля и, вообще, после *n* – й цифры стоит *n* нулей, не является периодической.

Поэтому написанная дробь не представляет никакого рационального числа. В этом случае говорят, что данная дробь является *иррациональным числом.*

Иррациональным числом называется бесконечная десятичная непериодическая дробь.

Иррациональные числа могут быть положительными и отрицательными.

<u>*Примеры:*</u> число 0,123456789101112… - положительное, а -5,246810121416…-отрицательное.

$\sqrt{2}, -\sqrt{5}, \sqrt[3]{7}, \pi$ - также иррациональные числа.

Рациональные и иррациональные числа образуют *множество действительных чисел R*.

<u>*Определение:*</u> *Действительным числом называется бесконечная десятичная дробь, т.е. дробь вида*

$$+a_0, a_1a_2a_3\ldots \quad \textit{или} \quad -a_0, a_1a_2a_3\ldots,$$

где a_0 *- целое неотрицательное число, а каждая из букв* $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *- это одна из десяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.*

<u>*Пример*</u>: $\pi = 3{,}14159\ldots$ здесь $a_0 = 3$, $a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 1, a_4 = 5, a_5 = 9$

Задачи для самостоятельного решения
1 вариант

1. Вычислите $\frac{3}{4}\cdot(1{,}3-0{,}9)$.

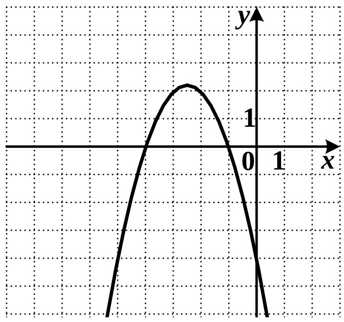
2. Найдите частное $\dfrac{4{,}5\cdot 10^{-4}}{9\cdot 10^{-2}}$. Ответ запишите в виде десятичной дроби.

3. Найдите значение выражения $\dfrac{a}{c+b}$ при $a=-4{,}8$; $b=0{,}2$; $c=0{,}6$.

4. Упростите выражение $\dfrac{x-y}{x^2}\cdot\dfrac{5x^3}{x^2-y^2}$.

5. При каких значениях переменной *x* имеет смысл выражение $\sqrt{x^2+2x}$?

6. График какой квадратичной функции изображен на рисунке?



1) $y=-x^2+5x-4$ 2) $y=-x^2-5x-4$

3) $y=x^2+5x-4$ 4) $y=x^2-5x-4$

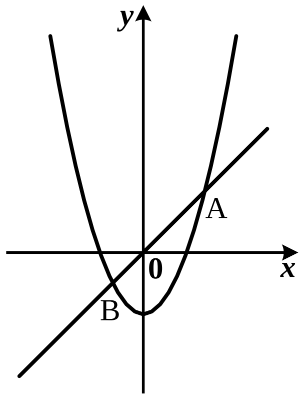
7. Решите неравенство $7x-2(2x+3)>3$.

8. Прочитайте задачу: «Площадь прямоугольного треугольника равна 24 см^2. Длины его катетов относятся как 3:4. Найдите длины катетов этого треугольника».

Пусть a и b - длины катетов треугольника (в см), причем, a - длина меньшего катета. Какая система уравнений **не соответствует** условию задачи?

1) $\begin{cases} ab=48, \\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{4} \end{cases}$. 2) $\begin{cases} ab=24, \\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{4} \end{cases}$. 3) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}ab=24, \\ 4a=3b \end{cases}$. 4) $\begin{cases} ab=48, \\ \dfrac{b}{a}=\dfrac{4}{3} \end{cases}$.

9. Прямая $y = x$ пересекает параболу $y = x^2 - 2$ в двух точках. Вычислите координаты точки *A*.



2 вариант

1. Вычислите $\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) \cdot 1{,}2$.

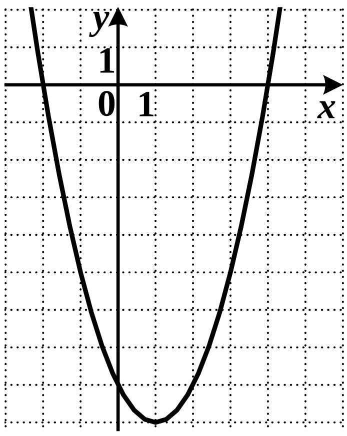
2. Найдите произведение $\left(2{,}6 \cdot 10^{-2}\right) \cdot \left(5 \cdot 10^{-2}\right)$. Ответ запишите в виде десятичной дроби.

3. Найдите значение выражения $\frac{a-b}{c}$ при $a = 6{,}4$; $b = -2$; $c = 1{,}2$

4. Упростите выражение $\frac{5}{2x} + \frac{1}{x}$.

5. При каких значениях переменной x выражение $\sqrt{x^2 - 3x}$ **не имеет смысла**?

6. График какой квадратичной функции изображен на рисунке?



1) $y = x^2 - 2x - 8$ 2) $y = -x^2 - 2x - 8$

3) $y = x^2 + 2x - 8$ 4) $y = -x^2 + 2x - 8$

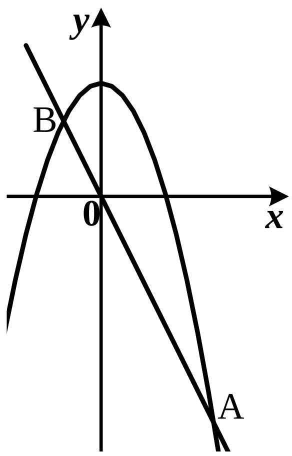
7. Решите неравенство $4(3x - 1) - 8x > 12$.

8. Прочитайте задачу: «На одно платье и три сарафана пошло 9 м ткани, а на три таких же платья и пять сарафанов – 19 м ткани. Сколько метров ткани потребуется на одно платье и на один сарафан?».

Пусть x - количество ткани (в м), которое потребуется на одно платье, у - количество ткани (в м), которое потребуется на один сарафан. Какая система уравнений **не соответствует** условию задачи?

1) $\begin{cases} 2x+6y=18, \\ 3x+5y=19 \end{cases}$. 2) $\begin{cases} x+3y=9, \\ 5y=19-3x \end{cases}$. 3) $\begin{cases} x-9=-3y, \\ 3x+5y=19 \end{cases}$. 4) $\begin{cases} x+3y=9, \\ 3x+19=5y \end{cases}$.

9. Прямая $y=-2x$ пересекает параболу $y=-x^2+3$ в двух точках. Вычислите координаты точки *B*.



Тема 2
Корни, степени и логарифмы

Тождественные преобразования над арифметическими корнями натуральной степени

Краткие теоретические сведения

__Опр.__ Арифметическим корнем натуральной степени $n \geq 2$ из неотрицательного числа a называется

неотрицательное число, *n* – ая степень которого равна *a.*

Примеры

1. $\sqrt[3]{64}=4$, так как 4 > 0 и 4^3 = 64   2. $\sqrt[3]{125}=5$, так как 5 > 0 и 5^3 = 125

Из определения арифметического корня следует, что если $a \geq 0$, то $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ и $\sqrt[n]{a^n} = a$

Свойства арифметического корня:

Арифметический корень *n* – ой степени обладает следующими свойствами: если $a \geq 0$, $b \geq 0$ и *n, m* - натуральные числа, причём $n \geq 2$, $m \geq 2$, то

1. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ 2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

3. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ 4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Корень нечётной степени из отрицательного числа *a* вычисляется следующим образом:

$\sqrt[2k+1]{a} = -\sqrt[2k+1]{|\ a\ |}$

Например, $\sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{2^5} = -2$

Примеры применения свойств арифметического корня.

1. $\sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{27 \cdot 3} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$
2. $\sqrt[3]{\frac{256}{625}} : \sqrt[3]{\frac{4}{5}} = \sqrt[3]{\frac{256}{625} : \frac{4}{5}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{4}{5}$
3. $\sqrt[7]{5^{21}} = \sqrt[7]{\left(5^3\right)^7} = 5^3 = 125$
4. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{4096}} = \sqrt[12]{2^{12}} = 2$
5. $\left(\sqrt[4]{9}\right)^{-2} = \sqrt[4]{9^{-2}} = \sqrt[4]{\frac{1}{81}} = \frac{1}{3}$

Задачи для самостоятельного решения

1 вариант

1. Вычислить: а) $\sqrt[5]{3^{10} \cdot 2^{15}}$; б) $\sqrt[4]{3^{12} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8}$

2. Упростить выражение: а) $\left(\sqrt[3]{y^2}\right)^3$; б) $\left(\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{b^3}\right)^{12}$;

2 вариант

1. Вычислить: а) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 5^6}$ б) $\sqrt[10]{4^{30} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{20}}$

2. Упростить выражение: ; а) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{a^2 b}}\right)^6$; б) $\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b}\right)^6$

<u>**Опр.**</u> Если n – натуральное число, m – целое число и частное $-\frac{m}{n}$ является целым числом, то при а > 0 справедливо равенство $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

<u>Пример</u>

$16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = 2^3 = 8$

Преобразование выражений с рациональными и иррациональными показателями

Краткие теоретические сведения

<u>**Опр.**</u>

Для любых рациональных чисел p и q и a >0 и b >0 верны равенства:

1. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
2. $a^p : a^q = a^{p-q}$

3. $\left(a^{p}\right)^{q} = a^{p\cdot q}$

4. $\left(ab\right)^{p} = a^{p}\cdot a^{q}$

5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{p} = \dfrac{a^{p}}{b^{p}}$

6. Если $a \neq 0$, то $a^{0} = 1$

<u>Пример</u>

$$8^{\frac{1}{3}}\cdot 8^{\frac{1}{3}} - 16:16^{\frac{3}{4}} + \left(9^{\frac{1}{7}}\right)^{\frac{7}{2}} = 8^{\frac{2}{3}} - 16^{\frac{1}{4}} + 9^{\frac{1}{2}} = (2^{3})^{\frac{2}{3}} - \left(2^{4}\right)^{\frac{1}{4}} + \left(3^{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{2} - 2 + 3 = 4 - 2 + 3 = 5$$

Задачи для самостоятельного решения

1 вариант

1. **Вычислить:** а) $27^{\frac{2}{3}}$; б) $9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}}$; в) $150^{\frac{3}{2}} : 6^{\frac{3}{2}}$; г) $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-0,75} + 810000^{0,25} - \left(7\dfrac{19}{32}\right)^{\frac{1}{5}}$

2. **Представить в виде степени с рациональным показателем:** а) $a^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{a}$; б) $a^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{a}$;

3. **Вычислить:** а) $3^{1+2\sqrt[3]{2}} : 9^{\sqrt[3]{2}}$; б) $\left(25^{1+\sqrt{2}} - 5^{2\sqrt{2}}\right)\cdot 5^{-1-2\sqrt{2}}$;

4. **Сравнить числа:** а) $2^{\sqrt{3}}$ или $2^{1,7}$; б) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$ или $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1,7}$; в) $0,88^{\frac{1}{6}}$ или $\left(\dfrac{6}{11}\right)^{\frac{1}{6}}$ г) $\left(\dfrac{1}{12}\right)^{-\frac{1}{4}}$ или $\left(0,41\right)^{-\frac{1}{4}}$

5. **Упростить выражение:** а) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}}\right)}$ **;** б) $\dfrac{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{4}{9}}}{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{5}{4}}} - \dfrac{b^{-\frac{1}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}}}$

2 вариант

1. **Вычислить:**

а) $81^{\frac{3}{4}}$; б) $4^{\frac{1}{3}} : 4^{\frac{5}{6}}$; в) $144^{\frac{3}{4}} : 9^{\frac{3}{4}}$; г) $\left(0,001\right)^{-\frac{1}{3}} - 2^{-2}\cdot 64^{\frac{2}{3}} - 8^{-1\frac{1}{3}}$

2. **Представить в виде степени с рациональным показателем:**

а) $b^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{b}$; б) $b^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{b}$

3. **Вычислить:** а) $5^{1+2\sqrt[3]{2}} : 25^{\sqrt[3]{2}}$; б) $\left(2^{2\sqrt{3}} - 4^{\sqrt{3}-1}\right)\cdot 2^{-2\sqrt{3}}$;

4. **Сравнить числа:**

а) $3^{1,4}$ или $3^{\sqrt{2}}$ б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{1,4}$ или $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$; в) $0,88^{\frac{1}{7}}$ или $\left(\frac{6}{11}\right)^{\frac{1}{7}}$ г) $\left(\frac{5}{12}\right)^{-\frac{1}{3}}$ или $(0,41)^{-\frac{1}{3}}$

5. Упростить выражение: а) $\dfrac{b^{\frac{4}{3}}\left(b^{-\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)}{b^{\frac{1}{4}}\left(b^{\frac{3}{4}}+b^{-\frac{1}{4}}\right)}$; б) $\dfrac{b^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{4}{9}}}{b^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{5}{4}}}-\dfrac{a^{-\frac{1}{2}}-a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}}$

Преобразование и вычисление значений логарифмических выражений.

Краткие теоретические сведения

Опр. Логарифмом числа b по основанию a, где $a > 0$, $a \neq 1$, называется показатель степени, в которую надо возвести число а, чтобы получить число b.

Примеры

1. $\log_5 25 = 2$, *т.к.* $5^2 = 25$
2. $\log_3 3 = 1$, *т.к.* $3^1 = 3$

Определение логарифма можно записать так $a^{\log_a b} = b$. Его называют основным логарифмическим тождеством.

При преобразовании и вычислении значений логарифмических выражений применяют свойства логарифмов.

Свойства

1. $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
2. $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
3. $\log_a b^r = r \cdot \log_a b$
4. $\log_{a^p} b = \frac{1}{p} \cdot \log_a b$

Формула перехода к другому основанию: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

Опр. Десятичным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию 10 и пишут *lg b* вместо $\log_{10} b$

$\log_{10} b = \lg b$

Опр. Натуральным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию *e*, где *e* - иррациональное число, приближённо равное 2,7. При этом пишут *ln b* вместо $\log_e b$, т.е. $\log_e b = \ln b$

Действие нахождения логарифма числа называется *логарифмированием.*

Действие, обратное логарифмированию называется *потенцированием.*

Примеры

1) $\log_6 18 + \log_6 2 = \log_6 36 = 2;$
2) $\log_{12} 48 - \log_{12} 4 = \log_{12} 12 = 1;$
3) $\log_3 3^{\frac{1}{7}} = \frac{1}{7} \log_3 3 = \frac{1}{7}.$

Задачи для самостоятельного решения

1 вариант.

1. **Вычислить:** а) $9^{2\log_3 5}$; б) $2\log_{\frac{1}{3}} 6-\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 400+3\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{45}$;

в) $\dfrac{\log_2 24-\frac{1}{2}\log_2 72}{\log_3 18-\frac{1}{3}\log_3 72}$

2. **Найти х по данному логарифму :** $\lg x=2\lg 2+\lg(a+b)+\lg(a-b)$
3. **Прологарифмировать выражение:** $x=a^3b^2\sqrt{c}$
4. **Решить уравнение:** $\log_9 x^2+\log_{\sqrt{3}} x=3$
5. **При каких значениях х имеет смысл выражение:** $\log_6\left(49-x^2\right)$

2 вариант.

1. **Вычислить:** а) $3^{5\log_3 2}$; б) $\frac{1}{2}\log_7 36-\log_7 14-3\log_7 \sqrt[3]{21}$;

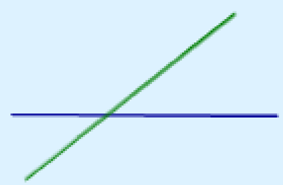
в) $\dfrac{\log_7 14-\frac{1}{3}\log_7 56}{\log_6 30-\frac{1}{2}\log_6 150}$

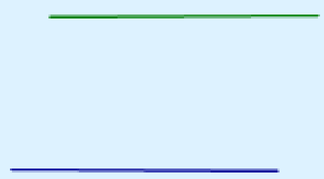
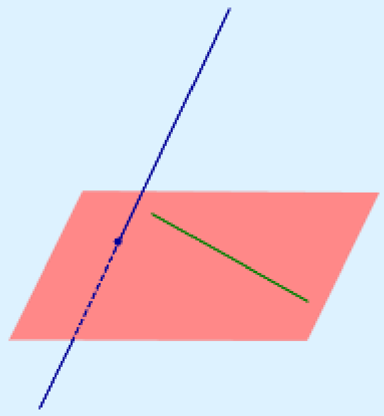
2. **Найти х по данному логарифму :** $\log_{\frac{1}{2}} x=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} a-\frac{1}{5}\log_{\frac{1}{2}} b$
3. **Прологарифмировать выражение:** $x=\dfrac{a^4\sqrt[3]{b}}{c^3}$
4. **Решить уравнение:** $\log_3 x=9\log_{27} 8-\log_3 4$
5. **При каких значениях х имеет смысл выражение:** $\log_7\left(x^2+x-6\right)$

Тема 3

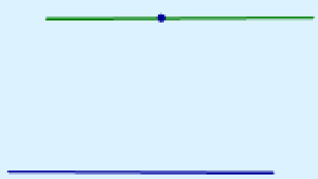
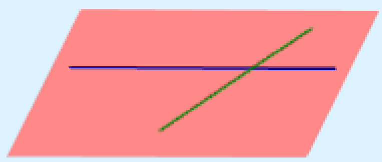
Прямые и плоскости в пространстве

Взаимное расположение прямых в пространстве. Угол между прямыми.
Теоретический материал

Фигура	Рисунок	Определение
Две пересекающиеся прямые		Две прямые называют пересекающимися прямыми, если они имеют единственную общую точку.

Две параллельные прямые		Две прямые называют параллельными прямыми, если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек
Две скрещивающиеся прямые		Две прямые называют скрещивающимися прямыми, если не существует плоскости, содержащей обе прямые.

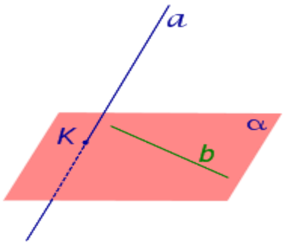
С перечисленными в предыдущей таблице случаями взаимного расположения двух прямых в пространстве близко связаны утверждения, представленные в следующей таблице.

Фигура	**Рисунок**	**Тип утверждения и формулировка**
Две различные точки		***Аксиома о прямой линии, заданной двумя точками*** Через две различные точки проходит одна и только одна прямая линия.
Прямая линия и точка, не лежащая на этой прямой		***Аксиома о параллельных прямых*** Через **точку, не лежащую на прямой**,проходит **одна и только одна прямая, параллельная** этой прямой.
Две пересекающиеся прямые		***Теорема о плоскости, определяемой двумя пересекающимися прямыми*** Через **две пересекающиеся прямые**проходит **одна и только одна плоскость**, содержащая обе эти прямые.

Две параллельные прямые		***Теорема о плоскости, определяемой двумя параллельными прямыми*** Через **две параллельные прямые**проходит **одна и только одна плоскость**, содержащая обе эти прямые.

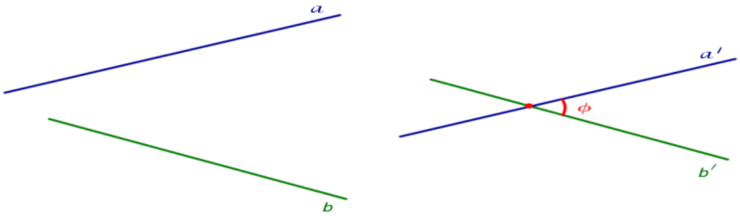
Признак скрещивающихся прямых

Если одна из двух прямых лежит на плоскости, а другая прямая пересекает эту лоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещиваются.



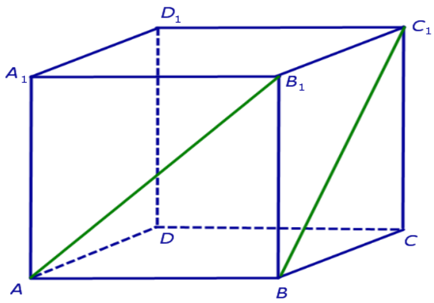
Угол между скрещивающимся прямыми

Углом между скрещивающимися прямыми называют угол межде пересекающимися прямыми параллельными данным скрещивающимся прямым.

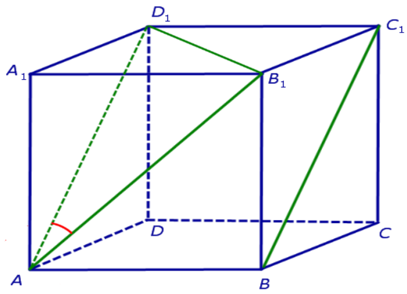


Задача

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти угол между прямыми AB_1 *и* BC_1
Решение: Так как прямая AB_1 пересекает плоскость BB_1C в точке B_1, которая не лежит на прямой BC_1 , то по признаку скрещивающихся прямых прямые AB_1 *и* BC_1 скрещиваются



Для того, чтобы найти угол между прямыми AB_1 *и* BC_1, проведем в кубе диагональ боковой грани AD_1 и диагональ верхнего основания B_1D_1.



По определению угла между скрещивающимся прямыми угол D_1AB_1 и является угол между прямыми AB_1 *и* BC_1. Поскольку треугольник D_1AB_1 равносторонний и угол D_1AB_1 равен 60 градусов.

Ответ: 60^0

Задачи для самостоятельного решения

Вариант 1

А1. В тетраэдре ABCD укажите прямую, скрещивающуюся с прямой АВ.

1.BD 2.CD 3.AD 4.AC

А2. В кубе ABCDA1B1C1D1 в плоскости ABCD найдите прямые, параллельные прямой A1B1.

1.AB и CD 2.AB и C1D1 3.CD и AC 4.AC и AB

А3. В кубе ABCDA1B1C1D1 найдите угол между скрещивающимися прямыми AA1 и BD

1.45° 2.60° 3.30° 4.90°

В1. Прямые ОВ и CD параллельные, а ОА и CD – скрещивающиеся прямые. Найдите угол между прямыми ОА и CD , если угол АОВ = 138°.

Ответ:_____

В2. Даны параллелограмм ABCD и трапеция АВЕК с основанием ЕК, не лежащим в одной плоскости. Выясните взаимное расположение прямых CD и ЕК. Найдите периметр трапеции, если в неё можно вписать окружность и CD = 22см и ЕК = 16 см.

Ответ:_____

С1. В кубе ABCDA1B1C1D1 на ребре DD1 выбрана точка Е так, что DE : ED1 = 1 : 2. Вычислите косинус угла между прямыми АЕ и СЕ

Ответ:____

Вариант 2

А1. В тетраэдре ABCD укажите прямую, скрещивающуюся с прямой АВ.

1.AC 2.BD 3.BC 4.AB

А2. В кубе ABCDA1B1C1D1 в плоскости ABCD найдите прямые, параллельные прямой B1C1.

1.AD и B1C1 2.CD и BC 3.BC и AC 4.AD и BC

А3. В кубе ABCDA1B1C1D1 найдите угол между скрещивающимися прямыми BB1 и AC

1.30° 2.90° 3.45° 4.60°

В1. Прямые ОВ и CD параллельные, а ОА и CD – скрещивающиеся прямые. Найдите угол между прямыми ОА и CD , если угол АОВ = 156°.

Ответ:_____

В2. Даны параллелограмм MNPK и трапеция MNLT с основанием LT, не лежащим в одной плоскости. Выясните взаимное расположение прямых PK и LT. Найдите периметр трапеции, если в неё можно вписать окружность и PK = 18cм и LT = 24см.

Ответ:___

С1. В кубе ABCDA1B1C1D1 на ребре DD1 выбрана точка Е так, что DE : ED1 = 1 : 3. Вычислите косинус угла между прямыми АЕ и СЕ

Ответ:____

Ключ тесту «Взаимное расположение прямых в пространстве. Угол между двумя прямыми»

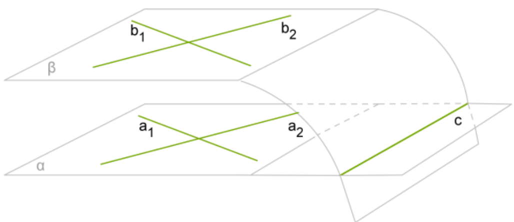
№ варианта	A1	A2	A3	B1	B2	C1
1	2	1	4	42	параллельны; 76 см	1/10
2	3	4	2	24	параллельны; 84 см	1/17

Параллельность плоскостей.
Теоретический материал

Плоскости, которые не пересекаются, называются параллельными. Параллельные плоскости α и β обозначаются α‖β

Признак параллельности плоскостей.

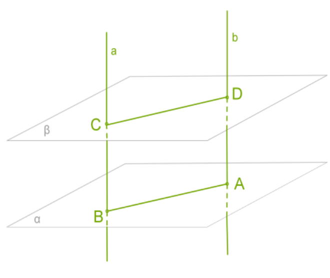
Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

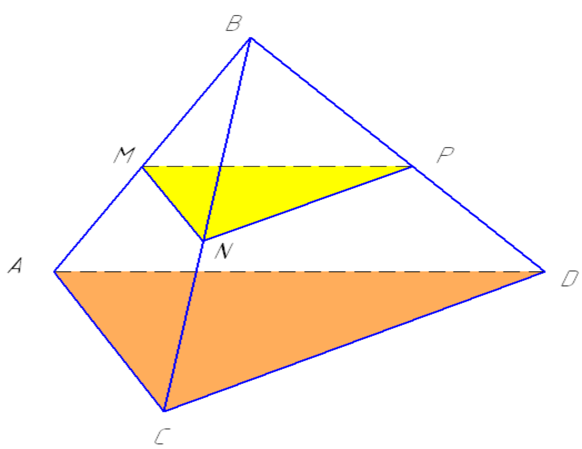


Свойства параллельных плоскостей.

Теорема 1. Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны.

Теорема 2. Отрезки параллельных прямых, заключенных между двумя параллельными плоскостями, равны.





<u>Задача № 1.</u>
Дано:

ΔADC

$B \notin (ADC)$

$AM = MB, CN = NB, DP = PB$

$S_{\Delta ADC} = 48см^2$

Доказать:

$(MNP) \parallel (ADC)$

Найти: $S_{\Delta MNP}$

Доказательство:

1. MN - средняя линия $\Delta ABC \Rightarrow MN \parallel AC$.
2. NP – средняя линия $\Delta CBD \Rightarrow NP \parallel CD$.
3.

$MN \cap NP = N$

$MN, NP \in (MNP)$

$MN \parallel AC \Rightarrow (MNP) \parallel (ADC)$ по признаку параллельности 2 пл.

$NP \parallel CD$

$AC, CD \in (ADC)$

4. $\frac{MN}{AC} = \frac{NP}{CD} = \frac{MP}{AD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta MNP$ подобен ΔADC по третьему признаку подобия треугольников (если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны) $\Rightarrow \frac{S_{\Delta MNP}}{S_{\Delta ADC}} = \frac{1}{4}$ (так как отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия)

$\frac{S_{\Delta MNP}}{48} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{\Delta MNP} = \frac{1}{4} \cdot 48 = 12(см^2)$

Ответ: $S_{\Delta MNP} = 12см^2$.

Задачи для самостоятельного решения

Вариант 1.

1.Прямая *a*, параллельная прямой *b*, пересекает плоскость *α*. Прямая *c* параллельна прямой *b*, тогда:

а) прямые *a* и *c* пересекаются; б) прямая *c* лежит в плоскости *α*;

в) прямые *a* и*c* скрещиваются; г) прямые *a* и *c* параллельны.

2. Каким может быть взаимное расположение прямых *a* и *b*, если через прямую *a* можно провести плоскость, параллельную прямой *b*?

а) скрещиваются или пересекаются;

б) скрещиваются или параллельны;

в) только скрещиваются;

г) только параллельны.

3. **Прямые *а* и *в* лежат в параллельных плоскостях, следовательно эти прямые**

а)скрещиваются или пересекаются; б) скрещиваются или параллельны;

в) только скрещиваются; г) только параллельны.

4. Каким может быть взаимное расположение двух прямых, если обе они параллельны одной плоскости?

а) только параллельны; б) все случаи взаимного расположения;

в) только скрещиваются; г) только пересекаются.

5. Прямая *a* параллельна плоскости *α*. Какое из следующих утверждений верно?

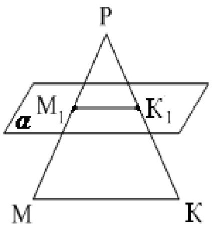
а) Прямая ***a*** параллельна любой прямой, лежащей в плоскости **α**;

б) прямая ***a*** не пересекает ни одну прямую, лежащую в плоскости ***α*;**

в) прямая ***a*** скрещивается со всеми прямыми плоскости ***α*;**

г) прямая ***a*** имеет общую точку с плоскостью .

6.Дан треугольник МКР. Плоскость, параллельная прямой МК пересекает МР в точке $М_1$, РК – в точке $К_1$. МК = 18 см, МР : $М_1$Р = 12 : 5. Тогда длина отрезка $М_1К_1$ равна…



Вариант 2

1.Прямая *c*, параллельная прямой *a*, пересекает плоскость *β*. Прямая *b* параллельна прямой *a*, тогда:

а) прямые b и c пересекаются; б) прямая b лежит в плоскости β;

в) прямые b и c скрещиваются; г) прямые b и c параллельны.

2.Каким может быть взаимное расположение прямых *a* и *b*, если любая плоскость, проходящая через *a*, не параллельна *b*?

а) скрещиваются; б) параллельны; в) пересекаются; г) определить нельзя.

3.Прямые *а* и *в* лежат в параллельных плоскостях, следовательно эти прямые

а)скрещиваются или пересекаются; б) скрещиваются или параллельны

в) только скрещиваются; г) только параллельны.

4.Прямая *a* параллельна плоскости *α*. Какое из следующих утверждений верно?

а) Прямая ***a*** параллельна любой прямой, лежащей в плоскости **α**;

б) прямая ***a*** не пересекает ни одну прямую, лежащую в плоскости ***α*;**

в) прямая ***a*** скрещивается со всеми прямыми плоскости ***α*;**

г) прямая ***a*** имеет общую точку с плоскостью .

5.Каким может быть взаимное расположение прямых *a* и *b*, если прямая *a* лежит в плоскости *α*, а прямая *b* параллельна этой плоскости?

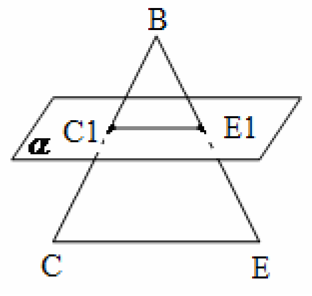
а) Параллельны или пересекаются;

б) скрещиваются или пересекаются;

в) параллельны или скрещиваются;

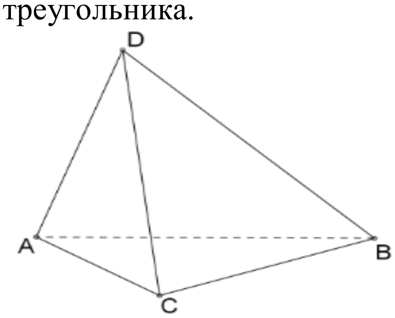
г) определить нельзя.

6. Дан треугольник ВСЕ. Плоскость, параллельная СЕ, пересекает ВЕ в точке $Е_1$, ВС – в точке $С_1$. ВС = 28 см, $С_1Е_1$: СЕ = 3 : 8. Тогда длина отрезка $ВС_1$ равна…



Тетраэдр и параллелепипед
Теоретический материал

Тетраэдр (четырехгранник) - многогранник, гранями которого являются четыре треугольника.

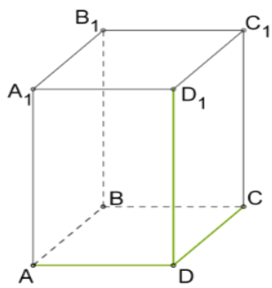


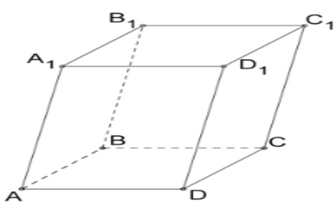
У тетраэдра 4 грани, 4 вершины и 6 ребер (Рис.1.).
Один из треугольников называется **основанием** тетраэдра, а три остальные - **боковыми гранями** тетраэдра.

В зависимости от видов треугольников и их расположения, выделяют разные виды тетраэдров.
- **равногранный тетраэдр**, у которого все грани - равные между собой треугольники;
- **правильная треугольная пирамида** - основание равносторонний треугольник, все боковые грани одинаковые равнобедренные треугольники
- **правильный тетраэдр**, у которого все четыре грани - равносторонние треугольники .

Свойство правильного тетраэдра:

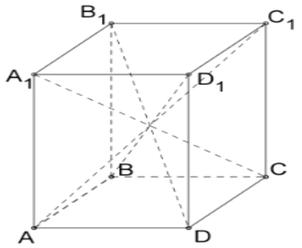
Из определения правильного многогранника следует, что все ребра тетраэдра имеют равную длину, а грани - равную площадь.
Параллелепипедом называется многогранник, у которого 6 граней - параллелограммы.
В зависимости от видов параллелограммов и их расположения, выделяют разные виды параллелепипедов:
Параллелепипеды могут быть прямые и наклонные.
У **прямых** параллелепипедов боковые грани прямоугольники,





у **наклонных** - параллелограммы .
Прямой параллелепипед, у которого основанием тоже является прямоугольник, называется **прямоугольным параллелепипедом**.

Две грани параллелепипеда, имеющие общее ребро, называются смежными, а не имеющие общих ребер — противоположными.
Ребра параллелепипеда, не принадлежащие основаниям, называют боковыми ребрами.
Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани,

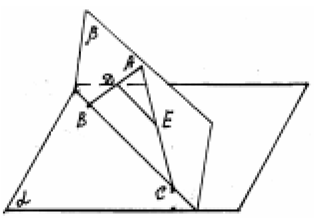


называется **диагональю параллелепипеда.**
Длины непараллельных рёбер прямоугольного параллелепипеда называются его **линейными размерами**(**измерениями**).
У прямоугольного параллелепипеда три линейных размера DA, DC, DD1

Свойства параллелепипеда:

- Противоположные грани параллелепипеда равны и параллельны.
- Все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.
- Боковые грани прямого параллелепипеда — прямоугольники.
- Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений.

Задача 1. Из точки A к плоскости α проведены два отрезка AC и AB = 9 см, точка D $\in$ AB, точка E $\in$ AC, DE || α и AE/EC = 1/2. Найти отрезки AD и DB.



Решение:

1) Так как прямые AB и AC пересекающиеся, то по следствию 2 из аксиом существует плоскость (ABC), пусть β.

2) По аксиоме 3 $\beta \cap \alpha$ = BC. По аксиоме 2 DE принадлежит β, а т.к. DE||α, то DE||BC.

3) По теореме Фалеса AE/EC = AD/DB. Пусть AD = x и DB = 9-x, тогда 1/2 = x/(9-x), 9-x = 2x, x=3, т.е. AD = 3 см, DB = 9-3 = 6 (см).

Ответ: AD = 3 см, DB = 6 см.

Задача 2.

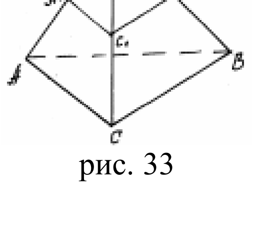


рис. 33

Дано: DABC - тетраэдр, A_1, B_1, C_1 - середины рёбер AD, CD и BD.

Доказать: (ABC) || ($A_1B_1C_1$)

Доказательство:

1. По аксиоме 2 A_1C_1 принадлежит (A D C), а т.к. A_1 и C_1 - середины AD и DC, то A_1C_1 - средняя линия $\triangle$ADC => A_1C_1|| AC по свойству средней линии.

2. Аналогично рассуждая, получаем: $A_1B_1 \parallel AB$.
3. По признаку параллельности плоскостей $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$.
4.

5. Задачи для самостоятельного решения

1 Вариант

1. Найдите квадрат расстояния между вершинами B и D_1 прямоугольного параллелепипеда, для которого AB=4, AD=6, AA_1=5
2. Найдите расстояние между вершинами B и D прямоугольного параллелепипеда, для которого AB=6, AD=8, AA_1=3
3. Найдите расстояние между вершинами B и A_1 прямоугольного параллелепипеда, для которого AB=12, AD=7, AA_1=5

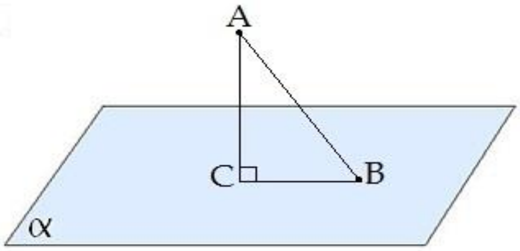
2 Вариант

1. Найдите расстояние между вершинами B и D прямоугольного параллелепипеда, для которого AB=5, AD=12, AA_1=5
2. Найдите квадрат расстояния между вершинами D и B_1 прямоугольного параллелепипеда, для которого AB=7, AD=7, AA_1=4
3. Найдите расстояние между вершинами A_1 и D прямоугольного параллелепипеда, для которого AB=4, AD=12, AA_1=9

Перпендикуляр и наклонные. Теорема о трех перпендикулярах

Теоретический материал

Пусть точка A не принадлежит плоскости α . Проведем прямую a, проходящую через эту точку и перпендикулярную α . Точку пересечения прямой a с плоскостью α обозначим C. Отрезок AC называется **перпендикуляром**, опущенным из точки A на плоскость α. **Наклонной** к плоскости называется прямая, пересекающая эту плоскость и не перпендикулярная ей. Наклонной называют также отрезок, соединяющий точку, не принадлежащую плоскости, с точкой плоскости, и не являющийся перпендикуляром.



На рисунке: AC – перпендикуляр к плоскости α, AB – наклонная, BC – проекция наклонной.

Примеры материальных моделей перпендикуляров к плоскости: столб, телевизионная вышка перпендикулярны плоскости горизонта; перпендикулярно этой плоскости забивают сваи, бурят скважины, проходят шахтные стволы, запускают космические корабли. Только набрав нужную высоту, ракета отклоняется в нужном направлении.

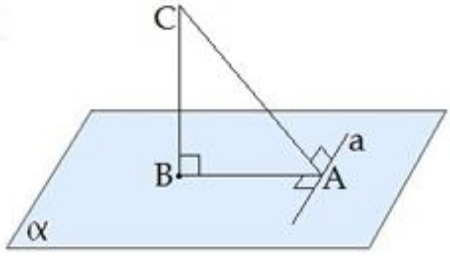
Из всех расстояний от точки A до различных точек плоскости α наименьшим является расстояние до точки B. Это расстояние, т.е. длина перпендикуляра, проведенного из точки A к плоскости α, называется расстоянием от точки A до плоскости α.

Теорема о перпендикуляре и наклонной

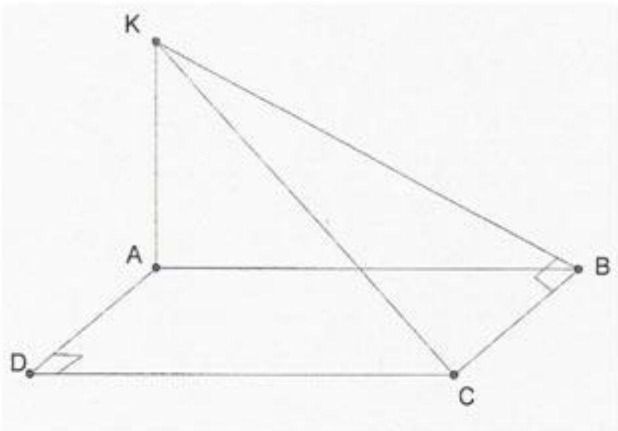
Перпендикуляр, опущенный из точки на плоскость, короче всякой наклонной, проведенной из той же точки к той же плоскости.

Теорема трех перпендикулярах

Если прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна ее проекции, то она перпендикулярна и самой наклонной.



Задача 1.
Из вершины A квадрата ABCD восстановлен перпендикуляр AK к его плоскости. Докажите, что BC перпендикулярно KB.



Дано:

ABCD – квадрат,
AK ⊥ (ABCD).

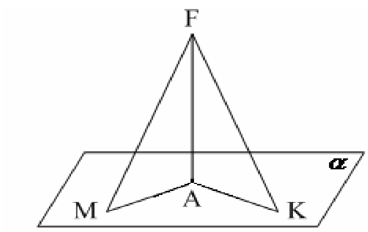
Доказать: BC ⊥ BK.

AK ⊥(ABCD) (по условию),
BK – наклонная,
AB – проекция KB на плоскость (ABCD),
BC ⊥ AB (как смежные стороны квадрата),
тогда BC ⊥ BK (по теореме о трех перпендикулярах).

Задачи для самостоятельного решения

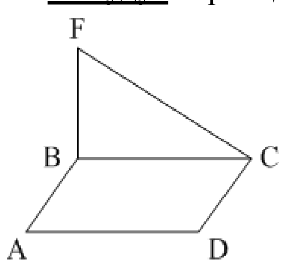
Вариант I

1. $AF \perp \alpha.$
<u>Неверно</u>, что…



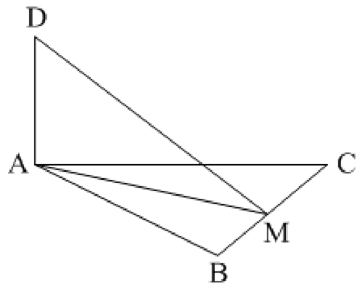
1) $FM > AF$; 2) $FK > FM$; 3) $AK < FK$.

2. $BF \perp (ABC)$. Прямые CD и CF **<u>не будут</u>** перпендикулярными, если $ABCD$ будет…



1) прямоугольником; 2) ромбом; 3) квадратом.

3. $AD \perp (ABC)$. Прямые DM и BC **будут** перпендикулярными, если AM будет…



1) биссектрисой; 2) медианой; 3) высотой.

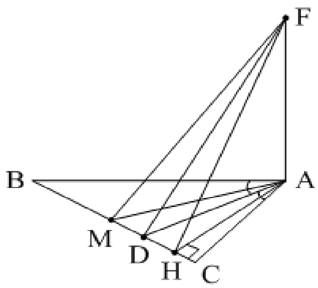
4. Точка M равноудалена от вершин треугольника ABC. Тогда проекция точки M на плоскости ABC есть точка пересечения…

1) высот треугольника;

2) биссектрис углов треугольника;

3) серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

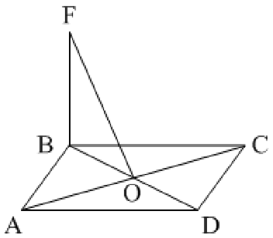
5. В треугольнике ABC AM – медиана, AD – биссектриса, AH – высота. $AF \perp (ABC)$. Тогда расстояние от точки F до прямой BC это длина отрезка…



1) FM; 2) FD; 3) FH.

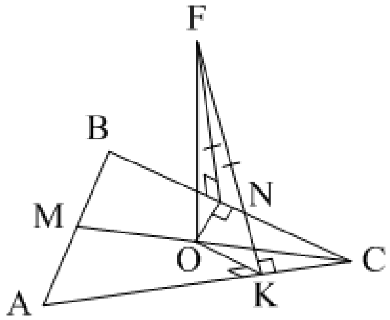
6. ABCD – параллелограмм, $AC \cap BD = O$. $FO \perp (ABC)$.

FO – расстояние от точки F до прямой AC. Тогда $ABCD$ **не может** быть…



1) прямоугольником; 2) ромбом; 3) квадратом.

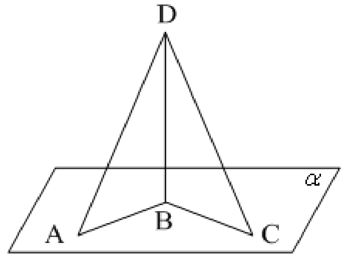
7. ΔABC. $FK \perp AC$, $FN \perp BC$, $FK = FN$. $FO \perp (ABC)$, $O \in CM$. Тогда CM – …



1) биссектриса; 2) медиана; 3) высота.

Вариант 2

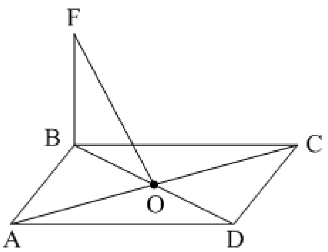
1. $BD \perp \alpha.$ **Верно**, что…



1) $BC < AD$; 2) $AB > AD$; 3) $AD > DC$.

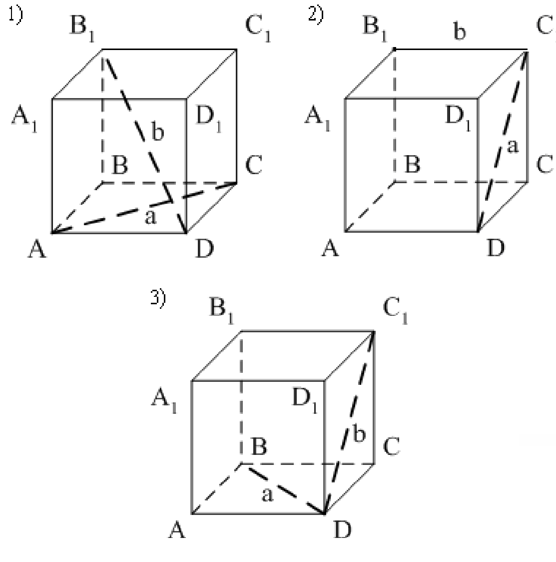
2. $BF \perp (ABC).$

Прямые AC и FO **не будут** перпендикулярными, если $ABCD$ будет…



1) прямоугольником; 2) ромбом; 3) квадратом.

3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Прямые a и b неперпендикулярны на рисунке…



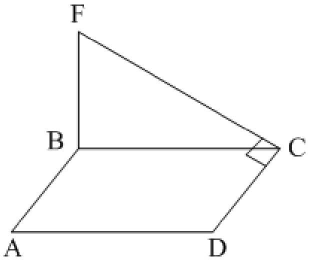
4. Точка M равноудалена от вершин треугольника ABC. Тогда проекция точки M на плоскость ABC есть…

1) точка пересечения высот;

2) центр описанной около ΔABC окружности;

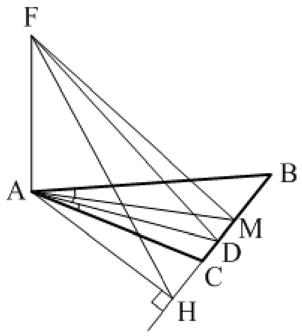
3) центр вписанной в ΔABC окружности.

5. $ABCD$ – параллелограмм. $BF \perp (ABC)$. CF – расстояние от F до прямой CD. Тогда $ABCD$ **не может** быть…



1) ромбом; 2) квадратом; 3) прямоугольником.

6. В треугольнике ABC AM – медиана, AD – биссектриса, AH – высота. Тогда расстояние от точки F до прямой BC равно длине отрезка…



1) FM; 2) FD; 3) FH.

7. Точка M равноудалена от сторон AB и AC треугольника ABC. Тогда проекция точки M на плоскость ABC лежит на прямой, содержащей…

1) биссектрису угла A треугольника ABC;

2) медиану, проведённую к стороне BC треугольника ABC;

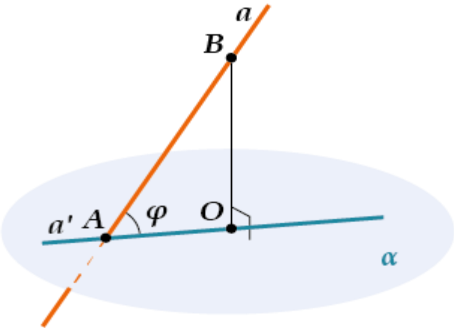
3) высоту, проведённую из вершины A треугольника ABC.

Угол между прямой и плоскостью
Теоретический материал

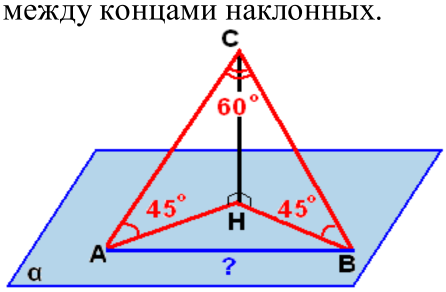
Понятие угла между прямой и плоскостью можно ввести для любого взаимного расположения прямой и плоскости.

Если прямая а перпендикулярна плоскости , то угол между а и α считается равным 90 .

Если прямая а параллельна плоскости или лежит в этой плоскости, то угол между а и α считается равным нулю.
Если прямая а является наклонной к плоскости, то угол между прямой а и её проекцией на плоскость



Задача 1.
Из точки, отстоящей от плоскости на расстояние *a*, проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы в 45^0, а между собой угол в 60^0. Определить расстояние между концами наклонных.



Решение:
1. Треугольники АСН и СНВ прямоугольные и <САН=<СВН=45°⇒ СН=АН=НВ=*a*
2. По теореме Пифагора СА=СВ=$a\sqrt{2}$;
3. В треугольнике АВС <АСВ=60° и АС=СВ⇒ треугольник АВС равносторонний⇒ АВ= $a\sqrt{2}$;

Задачи для самостоятельного решения
Вариант 1.

1. Верно ли утверждение?
а) Длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость, называется расстоянием от
точки до плоскости;
б) Конец наклонной, лежащий вне данной плоскости, называется основанием наклонной;
в) Если прямая параллельна плоскости, то все ее точки находятся на одинаковом расстоянии;
г) Если к плоскости проведены две наклонные, то их проекции на плоскость равны.

2. Продолжи предложение.
а) Угол между прямой ВС и плоскостью α равен 40°. Найдите угол между прямой ВС и прямой
BD, перпендикулярной к плоскости α. Угол равен …
б) Отрезок BD – перпендикуляр к плоскости равнобедренного треугольника АВС, М – середина основания АС. Тогда $\angle$CMD = …

3. Справедливо ли утверждение?
а) KA$\perp$BD, если ABCD - квадрат, то KC$\perp$(BCD).
б) AB$\perp$MP,если ΔMNP – равносторонний и AO$\perp$(MNP).

4. Реши задачи:
1. В ΔAKC, AK$\perp$CK, т.М не принадлежит плоскости AKC и MK$\perp$CK, то

а) AK ⊥ MK; б) CK ⊥ AM.

2. В △ ABC, AB = 10 см, ∠A = 30°, BD ⊥ (ABC). BD = 12 см. Найти расстояние от D до AC.

Вариант 2.

1. Верно ли утверждение?

а) Конец отрезка, являющегося перпендикуляром к плоскости, лежащего в ней, называется основанием перпендикуляра;

б) Отрезок, соединяющий основание наклонной с данной точкой, не лежащей в плоскости, называется проекцией наклонной;

в) Проекцией перпендикуляра является точка, а наклонной – отрезок;

г) Если две наклонные имеют равные проекции,то они сами равны.

2. Продолжи предложение.

а) Из одной точки к плоскости проведены перпендикуляр и наклонная. Углы, образованные наклонной с ее проекцией и с перпендикуляром, равны. Угол между наклонной и плоскостью равен …

б) Ребро AC тетраэдра ABCD перпендикулярно к плоскости грани BCD, отрезок AH – высота грани ABD. Тогда ∠BHC = …

3. Справедливо ли утверждение?

а) ED ⊥ AC,если △ABC - равносторонний, то OE ⊥ (ABC).

б) OF ⊥ EF,если ABCDEF - правильный шестиугольник и OB ⊥ (ABF).

4. Реши задачи:

1.В △MKC, CM ⊥ KM, т.E не принадлежит плоскости MKC и EM ⊥ MK, то

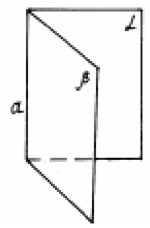
а) KM ⊥ (MEC); б) KM ⊥ CE.

2. В △ ABC, AB = 16 см, ∠A = 30°, BK ⊥ (ABC). Расстояние от К до AC равно 17 см. Найти BK.

Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей

Теоретический материал

Определение. Двугранным углом называется фигура, образованная прямой а и двумя полуплоскостями с общей границей а, и не принадлежащими одной плоскости.



а - ребро двугранного угла, полуплоскости - грани его.

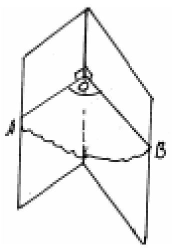


рис. 45

Угол AOB - линейный угол двугранного угла. Чтобы его построить, нужно выбрать произвольную точку O на ребре, а лучи OA и OB должны быть перпендикулярны к ребру.

Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера любого из его линейных углов.

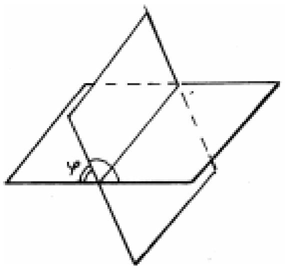


рис. 46

Двугранный угол называется прямым (острым, тупым), если он равен 90^o (меньше 90^o, больше 90^o).

Пусть Φ - тот из углов, который не превосходит любого из трёх остальных углов. Тогда угол между пересекающимися плоскостями равен Φ. ($0^o<\Phi\le 90^o$)

Две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90^o.

Признак перпендикулярности двух плоскостей.

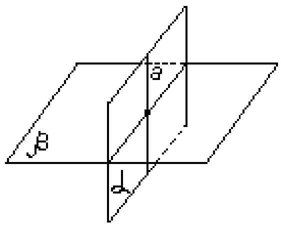


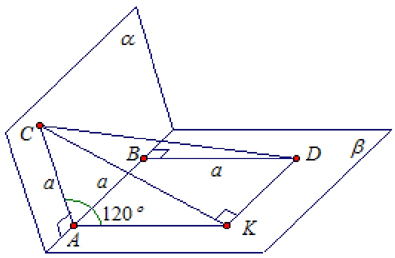
рис. 47

Если одна из двух плоскостей (α) проходит через прямую (а), перпендикулярную другой плоскости (β), то такие плоскости перпендикулярны.

Пример.

Задача: Точки A и B лежат на ребре данного двугранного угла, равного 120°.
Отрезки AC и BD проведены в разных гранях и перпендикулярны к ребру двугранного угла.
Найдите отрезок CD, если $AB = AC = BD = a$.

Дано: $\angle CABD$= 120°
$AC \perp AB$, $AC \subset \alpha$,
$BD \perp AB$, $BD \subset \beta$,
$AB = AC = BD = a$.
Найти: CD.



Решение:
Здесь дан тупой двугранный угол, $\angle CABD$= 120°.
AB – ребро двугранного угла, точка C лежит в одной полуплоскости, точка D лежит в другой полуплоскости. В одной полуплоскости проведена прямая AC, перпендикулярная AB.
В другой полуплоскости проведена прямая BD, перпендикулярная AB.
Проведем AK перпендикулярно AB и DK параллельно AB (рис. 2). Тогда угол CAK – линейный угол двугранного угла, а значит, $\angle CAK$ = 120°.
Так как прямые AK и BD перпендикулярны одной и той же прямой AB, то прямые AK и BD – параллельны. В четырехугольнике $AKDB$ противоположные стороны параллельны ($AK \parallel BD$, $AB \parallel DK$), значит, $AKBD$– параллелограмм. Значит, $AK=BD = a$.
Рассмотрим треугольник AKC. Найдем CK^2 с помощью теоремы косинусов:

$$CK^2 = AC^2 + AK^2 - 2\cdot AC\cdot AK\cdot\cos\angle CAK = a^2 + a^2 - 2\cdot a\cdot a\cdot\cos 120^\circ = 2a^2 + a^2 = 3a^2$$

Прямая *AB* перпендикулярна плоскости линейного угла (по свойству 1), значит, и параллельная ей прямая *DK* перпендикулярна плоскости линейного угла. А значит, прямая *DK* перпендикулярна прямой *CK*, лежащей в плоскости линейного угла, то есть угол *CKD* прямой.

Из прямоугольного треугольника *CKD* по теореме Пифагора находим гипотенузу *CD*.

$$CD = \sqrt{CK^2 + KD^2} = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a$$

Ответ: *2a*.

Задачи для самостоятельного решения

Вариант 1

1. Линейным углом двугранного угла **нельзя** назвать угол, возникающий при пересечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной…

1) ребру двугранного угла;

2) одной из граней двугранного угла;

3) граням двугранного угла.

2. Какое утверждение **верное**?

1) Не может ребро двугранного угла быть не перпендикулярным плоскости его линейного угла.

2) Не могут две плоскости, перпендикулярные к одной плоскости, быть непараллельными.

3) Не могут две плоскости, перпендикулярные к одной прямой, быть непараллельными.

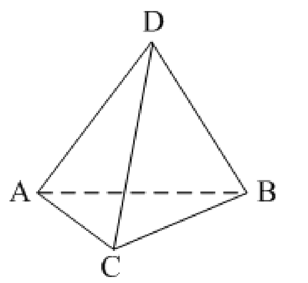
3. Какое утверждение **верное**?

1) $\alpha \perp \beta,\ a \in \alpha,\ b \in \beta \Rightarrow a \perp b.$

2) $\alpha \cap \beta = c,\ \alpha \perp \beta,\ a \in \alpha,\ b \in \beta,\ b \perp c \Rightarrow a \perp b.$

3) $a \in \alpha,\ b \in \beta,\ a \perp b \Rightarrow \alpha \perp \beta.$

4. $(ABC) \perp (ABD).$ Тогда основание перпендикуляра, опущенного из точки *D* на плоскость (*ABC*), лежит…



1) вне треугольника *ABC*;

2) на стороне *AB*;

3) внутри треугольника ABC.

5. Какое утверждение **неверное?**

1) Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

2) Если плоскости перпендикулярны, то линия их пересечения перпендикулярна любой прямой, лежащей в одной из данных плоскостей.

3) Плоскость, перпендикулярная линии пересечения двух данных плоскостей, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей.

6. **Не может** плоскость быть не перпендикулярной данной плоскости, если она проходит через прямую…

1) параллельную данной плоскости;

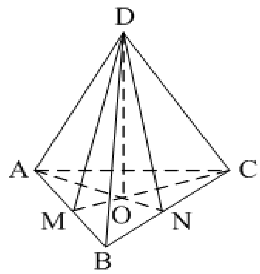
2) перпендикулярную данной плоскости;

3) не перпендикулярную данной плоскости.

7. Количество двугранных углов параллелепипеда **равно**…

1) 8; 2) 12; 3) 24.

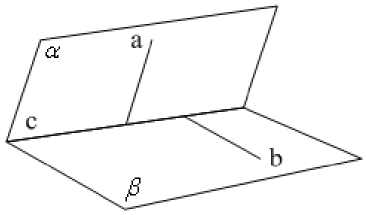
8. $\Delta ABC,$ AN и CM – высоты. $DO \perp (ABC).$ Градусная мера $\angle ABCD$ равна градусной мере угла…



1) ABD; 2) AND; 3) ACD.

Вариант 2

1. $\alpha \cap \beta = c,\ \ a \in \alpha,\ \ b \in \beta.$ Тогда $\angle(ab)$ – это линейный угол двугранного угла между плоскостями α и β, если…



1) $b \perp \alpha$; 2) $a \perp c$; 3) $a \perp c,\ b \perp c.$

2. Какое утверждение **верное?**

1) Не может ребро двугранного угла быть не перпендикулярным любой прямой, лежащей в плоскости его линейного угла.

2) Не могут быть две плоскости, перпендикулярные третьей, непараллельными.

3) Не могут быть две плоскости, перпендикулярные одной плоскости, непараллельными.

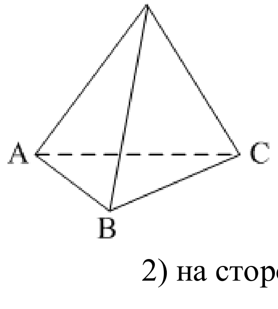
3. Какое утверждение **верное?**

1) $\alpha \cap \beta = c,\ a \in \alpha,\ b \in \beta,\ a \perp c,\ b \perp c \Rightarrow \alpha \perp \beta.$

2) $\alpha \cap \beta = c,\ \ \alpha \perp \beta,\ \ a \in \alpha,\ \ b \in \beta \Rightarrow a \perp b.$

3) $\alpha \cap \beta = c,\ \ \alpha \perp \beta,\ \ a \in \alpha,\ \ b \in \beta,\ \ a \perp c \Rightarrow a \perp b.$

4. $(ABC) \perp (ACD).$ Тогда основание перпендикуляра, опущенного из точки D на плоскость (ABC), лежит…



1) внутри треугольника ABC; 2) на стороне AC;

3) на стороне BC.

5. Какое утверждение **верное?**

1) $\alpha \perp \beta,\ \ a \in \alpha \Rightarrow a \perp \beta.$

2) $\alpha \cap \beta = c,\ \ \gamma \perp c \Rightarrow \gamma \perp \alpha$ и $\gamma \perp \beta.$

3) $\alpha \cap \beta,\ \alpha \perp \gamma \Rightarrow \beta \perp \gamma.$

6. Какое утверждение **верное?**

1) Нельзя через точку пространства провести три плоскости, каждые две из которых взаимно перпендикулярны.

2) Не существует прямой, пересекающей две данные скрещивающиеся прямые и перпендикулярной каждой из них.

3) Не может плоскость быть не перпендикулярной данной плоскости, если она проходит через прямую, перпендикулярную данной плоскости.

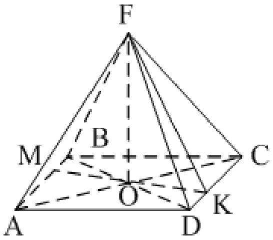
7. Количество двугранных углов тетраэдра **равно…**

1) 4;

2) 6;

3) 12.

8. *ABCD* – ромб, *MK* – высота. $FO \perp (ABC)$. Тогда градусная мера $\angle ADCF$ равна градусной мере…



1) *FDO*; 2) *FKO*; 3) *FDA*.

Параллельное проектирование. Изображение пространственных фигур
Теоретический материал

Пусть дано произвольную плоскость α, точка A (рис. 83) и прямую h, которое пересекает плоскость α. Проведем через точку A прямую, которая параллельна h, она пересекает плоскость α в некоторой точке A1. Найденную таким образом точку A; называют параллельной проекцией точки A на плоскость α в направлении h. Прямую h называют проектуючою прямой, плоскость α - плоскостью проекций.

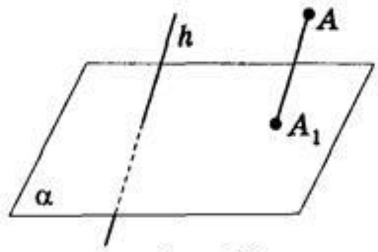


Рис. 83

Чтобы построить проекцию какой-либо фигуры, надо спроектировать на плоскость проекции каждую точку данной фигуры (рис. 84).

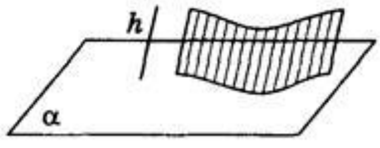


Рис. 84

Теорема. Если отрезки, которые проектируются, не параллельны проектирующей прямой, то при параллельном проектировании:

1) отрезки изображаются отрезками;

2) параллельные отрезки изображаются параллельными отрезками или отрезками одной прямой;

3) отношение длин параллельных отрезков и отрезков одной прямой сохраняется.
Следствие
1) Все прямые, которые проектируют точки отрезка AB лежат в одной плоскости β, которая пересекает плоскость α по прямой A_1B_1 (рис. 85). Следовательно, проекцией отрезка есть отрезок, причем произвольная точка C отрезка AB изображается точкой C_1 отрезка A_1B_1.

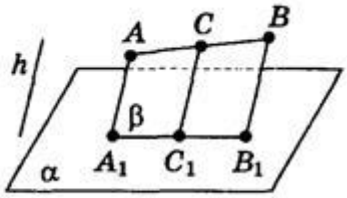


Рис. 85

2) Пусть отрезки AB и CD, которые проектируются, параллельные. Все прямые, которые их пересекают и параллельные h, заполняют или части одной плоскости (рис. 86), или параллельных плоскостей (рис. 87).

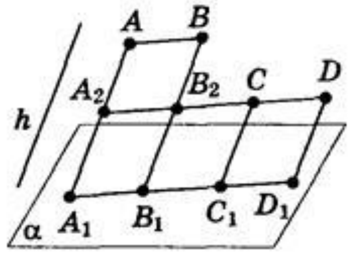


Рис. 86

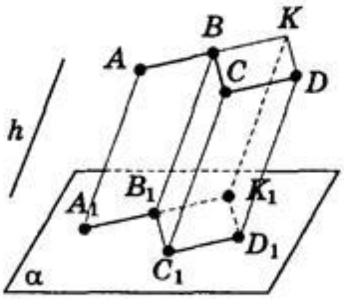


Рис. 87

Эти части плоскостей пересекают плоскость а соответственно или по отрезкам одной прямой, или по параллельным отрезкам A_1B_1 и C_1D_1.
3) Если отрезки AB и CB, которые проектируют, размещены на одной прямой (см. рис. 85), то по теореме о пропорциональных отрезках имеем: $A_1C_1 : C_1B_1 = AC : CB$.

Задачи для самостоятельного решения

1. При каком положении отрезка относительно плоскостей проекции его проекция: а) равна самому отрезку; б) есть точка?
2. Отрезок проецируется параллельно на плоскость. Как проектируется середина отрезка на эту плоскость?
3. Может ли проекция отрезка быть больше отрезка, который проектируют?
4. Могут непараллельные прямые проектироваться в параллельные прямые? Приведите примеры.
5. Как расположены точки A и B относительно плоскости CDD1C1 (рис. 88)?
6. Плоскость фигуры не параллельна направлению проектирования. В какую фигуру проектируется: а) треугольник; б) параллелограмм?

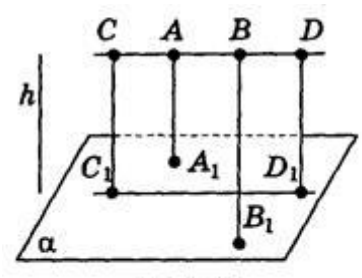
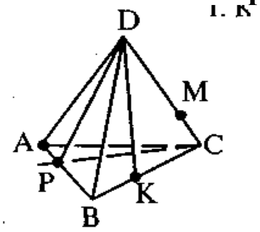


Рис. 88

Решение задач по теме по теме «Прямые и плоскости в пространстве»

Вариант 1

Параллельность прямых и плоскостей в пространстве



А1 Какой плоскости не принадлежит точка А?

А) PDB В) ADC С) APC Д) BDC

А2На каких плоскостях лежит прямая DB?

А) ADC и ADB В) ADB и ABC

С) ADB и DCB Д) DKB и DCA

А3 В какой точке пересекаются прямая PC и плоскость ADB?

А) P В) C С) A Д) D

А4По какой прямой пересекаются плоскости ABC и ADC?

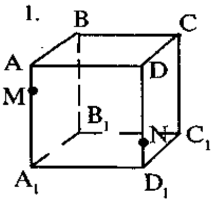
А) DB В) DC С) AC Д) BA

А5 Какие прямые лежат в плоскости BDC?

А) DB, AC,DK. AB В) KB, DA,DK. CP

С) DP, DC,DK. CA Д) DB, DC,DK. CB

1.



А6 Укажите точку пересечения прямой MD с плоскостью ABC

А) D В) C С) A Д) M

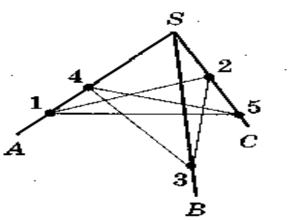
А7 Укажите прямую пересечения плоскостей ABC и ABB_1

А) DB В) DC С) BC Д) AB

А8 Плоскости α и β пересекаются по прямой с. Выберите верную запись:

А) $\alpha \times \beta = c$ В) $\alpha \cap \beta = c$ С) $\alpha \parallel \beta = c$ Д) $\alpha \cap \beta = C$

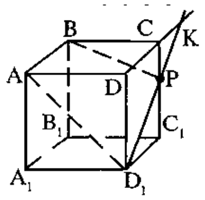
А9



Туго натянутая нить закреплена в точках 1,2,3,4,5, расположенных на стержнях SA,SB,SC. Укажите количество точек в которых отрезки нити соприкасаются

А) 0 В) 1 С) 2 Д) 3

А10



Как располагаются прямые AD_1 и D_1C_1?

А) параллельны В) пересекаются С) перпендикулярны

А11 Найдите угол между прямыми AD_1 и BB_1

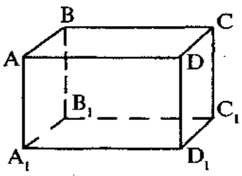
А) 180º В) 60 º С) 90 º Д) 45 º

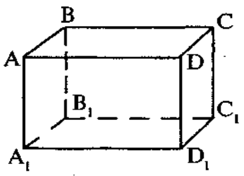
А12 Найдите точку пересечения прямых DC и CC_1

А) D В) С С) А Д) К

А13 Найдите рёбра, параллельные грани ABB_1A_1

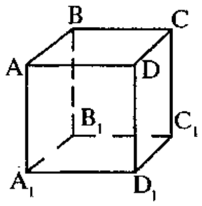
А) AD, BC, A_1D_1, B_1C_1 В) AB, BC, A_1D_1, B_1C_1





С) DD_1, CC_1, C_1D_1, DC

Перпендикулярность прямых и плоскостей в пространстве



А14 Укажите рёбра, перпендикулярные плоскости ABB_1

А) DA, BC,CC_1. AB В) CB, DA,D_1A_1. C_1A_1 С) DC, BC,DA. C_1B_1

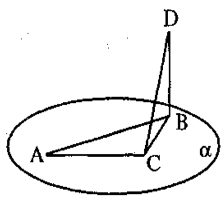
А15

Выберите верное утверждение

А) AD ‖ BA В) AB ⊥ D_1C_1 С) DC ‖ BC Д) DC ⊥BC

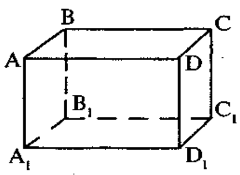
А16Как расположены друг к другу рёбра куба, выходящие из одной вершины?

А) Перпендикулярны В) Параллельны



А17 Отрезок BD перпендикулярен плоскости α. CDявляется::

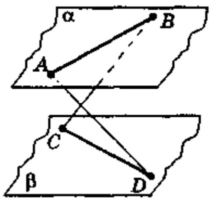
А) Перпендикуляром В) Наклонной С) Проекцией наклонной



А18

Укажите общий перпендикулярдля прямых AD и CC_1

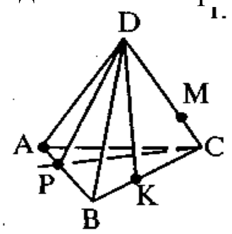
А) DC В) CA
С) DD_1 Д) BC
А19 Плоскости α и β параллельны. Каково взаимное расположение прямых AD и BC?
А) Пересекаются В) Скрещиваются



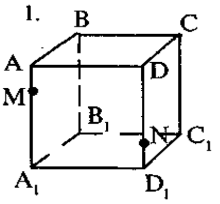
А20 Прямые a и b параллельные и лежат в плоскости α. Через каждую из этих прямых проведена плоскость, перпендикулярная α . Каково взаимное расположение полученных плоскостей?
А) Пересекаются В) Скрещиваются С) Параллельны Д) Совпадают

Вариант 2

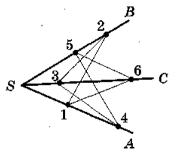
Параллельность прямых и плоскостей в пространстве Часть 1.
Задание с выбором ответа (1 балл).



А1 Какой плоскости не принадлежит точка B?
А) PDB В) ADC С) APC Д) BDC
А2 На каких плоскостях лежит прямая DA?
А) ADC и ADB В) ADB и ABC С) ADB и DCB Д) DKB и DCA
А3 В какой точке пересекаются прямая DK и плоскость ADB ?
А) P В) K С) A Д) D
А4 По какой прямой пересекаются плоскости ABC и ADB?
А) DB В) DC С) AC Д) BA
А5 Какие прямые лежат в плоскости BDA?
А) DB, AC,DK. AB В) KB, DA,DK. CP
С) DP, DB,DA. BA Д) DB, DC,DK. CB



А6
Укажите точку пересечения прямой NC_1 с плоскостью $A_1B_1C_1$
А) D_1 В) C_1 С) A_1 Д) B_1
А7 Укажите прямую пересечения плоскостей ABD и ADD_1
А) DB В) BB_1 С) BC Д) AD
А8Прямые a и b пересекаются в точке C. Выберите верную запись:
А) $a \times b = c$ В) $a \cap b = c$ С) $a \parallel b = c$ Д) $a \cap b = C$
А9



Туго натянутая нить закреплена в точках 1,2,3,4,5, 6 расположенных на стержнях SA,SB,SC. Укажите количество точек в которых отрезки нити соприкасаются

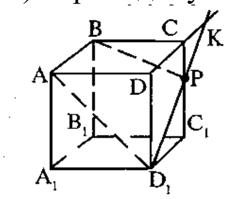
А) 0 В) 1 С) 2 Д) 3

А10 Как располагаются прямые DD_1 и DC?

А) параллельны

В) пересекаются

С) перпендикулярны



А11 Найдите угол между прямыми AA_1 и BC

А) 180º В) 60 º С) 90 º Д) 45 º

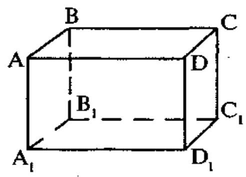
А12 Найдите точку пересечения прямых DC и D_1P

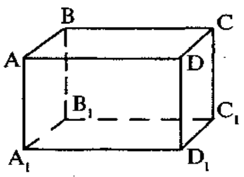
А) D В) С С) А Д) К

А13 Найдите рёбра, параллельные грани ADD_1A_1

А) BC, CC_1, BB_1, B_1C_1 В) AB, BC, A_1D_1, B_1C_1

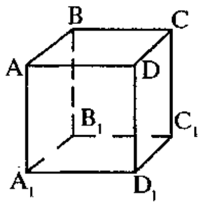
С) AD, BC, A_1D_1, AC





Перпендикулярность прямых и плоскостей в пространстве Часть 1.

Задание с выбором ответа (1 балл).



А14 Укажите рёбра, перпендикулярные плоскости ABC

А) DA, BC,CC_1. AB В) CB, DD_1,D_1A_1. C_1A_1 С) AA_1, BB_1,DD_1. C_1C_1

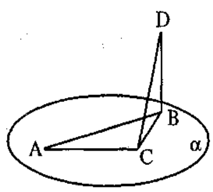
А15Выберите верное утверждение

А) AD $\perp$BA В) AB $\perp$ D_1C_1 С) DC $\parallel$ BB_1 Д) DC $\parallel$ BC

А16 Можно ли провести плоскость через четыре произвольные точки пространства?

А) Да

В) Нет



А17

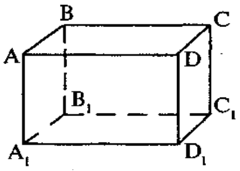
Отрезок BDперпендикулярен плоскости α. CB является::

А) Перпендикуляром

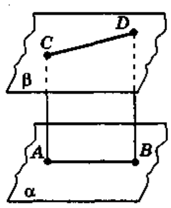
В) Наклонной С) Проекцией наклонной

А18 Укажите общий перпендикуляр для прямых AB и CC_1

А) DC В) CA С) DD_1 Д) BC



А19 Плоскости α и β параллельны. Каково взаимное расположение прямых АС и ВD?
А) Параллельны
В) Скрещиваются



А20
Прямые a и b-скрещивающиеся. Через a проведена плоскость α ‖ b,. Через прямую b проведена плоскость β‖a, . Каково взаимное расположение плоскостей α и β?
А) Пересекаются В) Скрещиваются С) Параллельны Д) Совпадают

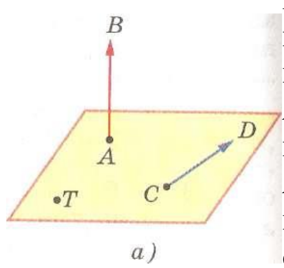
Тема 4
Координаты и векторы
Краткие теоретические сведения

Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой — концом, называется вектором. Направление вектора (от начала к концу) на рисунках отмечается стрелкой. Любая точка пространства также может рассматриваться как вектор. Такой вектор называется нулевым. Начало и конец нулевого вектора совпадают, и он не имеет какого-либо определенного направления. На рисунке 100, ***а*** изображены ненулевые векторы ***AB*** и ***CD*** и нулевой вектор ТТ, а на рисунке 100, б — ненулевые векторы а , b , m , c , имеющие общее начало. Нулевой вектор обозначается также символом 0

Длиной ненулевого вектора ***AB*** называется длина отрезка АВ. Длина вектора АВ (вектора, а) обозначается так: | АВ| (| а |). Длина нулевого вектора считается равной нулю: |0|=0.

Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Если два ненулевых вектора АВ и ***CD*** коллинеарны и если при этом лучи ***AB*** и ***CD*** сонаправлены, то векторы ***AB*** и ***CD*** называются сонаправленными, а если эти лучи не являются сонаправленными, то векторы ***AB*** и ***CD*** называются противоположно направленными. Нулевой вектор условимся считать сонаправленным с любым вектором.

Запись ***a\\b*** обозначает, что векторы, ***a и b*** **сонаправлены**



Изучая векторы на плоскости, мы отмечали, что многие физические величины, например, сила, перемещение, скорость, являются векторными величи**нами.** При изучении электрических и магнитных явлении появляются новые примеры векторных величин .Электрическое поле, создаваемое в пространстве зарядами,

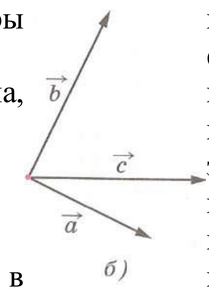


Рис. 100

характеризуется в каждой точке пространства вектором напряженности электрического поля. На рис. 102, *а* изображены векторы напряженности электрического поля положительного точечного заряда.

Равенство векторов

Векторы называются **равными,** если они сонаправлены и их длины равны. На рисунке 101

AE= *DK, так как AE\\ДК и \AE\=\DK\, а AB ≠ DC,так как* **AB** *не сонаправлен* **DC.**

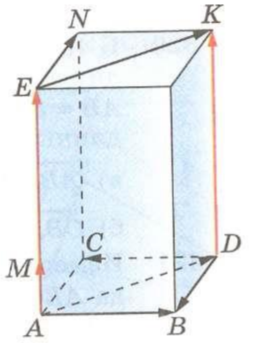
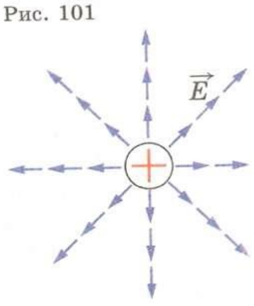


Рис. 101



а)

Если точка А — начало вектора а, то говорят, что вектор а **отложен** от точки А. Нетрудно доказать, что **от любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.** В самом деле,

пусть а — данный вектор, М — данная точка (рис. 103). Проведем через начало и конец вектора а и точку М плоскость и в этой плоскости построим вектор **MN = a**. Очевидно, что вектор **MN** искомый. Из построения ясно также, что **MN** — единственный вектор с началом М, равный вектору а.

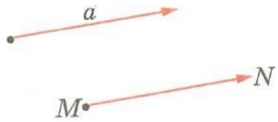
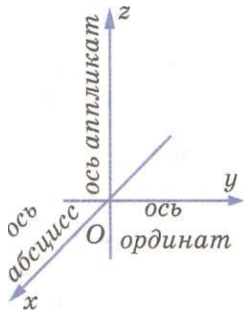


Рис. 103

Координаты вектора.

Если через точку пространства проведены 3 попарно перпендикулярные прямые, на каждой из них выбрано направление и выбрана единица измерения отрезков, то говорят, что задана прямоугольная система координат в пространстве.

Прямые с выбранными на них направлениями называются осями координат, а их общая точка – началом координат. Она обозначается буквой О. Оси координат обозначаются так: Ох, Оу. Их называют: ось абсцисс, ось ординат, ось аппликат. Вся система обозначается



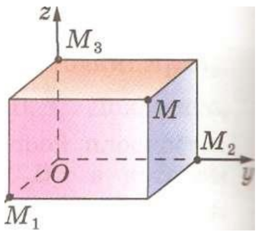
Oxyz.

Три плоскости, проходящие соответственно через оси координат Ох и Оу, Оу и Оz, Оz и Ох - координатные плоскости. Их обозначают Оху, Оуz, Оzх.

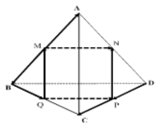
Точка О разделяет каждую из осей координат на 2 луча, один из них – положительная полуось, другой – отрицательная полуось.

В прямоугольной системе координат каждой точке М пространства сопоставляется тройка чисел, которые называются её координатами.

Проведем через точку М три плоскости, перепендикулярные к осям координат, и обозначим через М1, М2 и М3, точки пересечения этих плоскостей соответственно с осями абсцисс, ординат и аппликат. М1 – абсцисса, М2 – ордината, М3 – аппликата точки М. Координаты точки М записываются: М (х; у; z), х – абсцисса, у – ордината.



Задачи для самостоятельного решения

Уровень I Вариант I 1. Вопрос. Сформулируйте определения вектора, его длины, коллинеарности двух ненулевых векторов, равенства векторов. Проиллюстрируйте их, используя изображения параллелепипеда. 2. Задача. Дан тетраэдр ABCD, ребра которого равны. Точки M, N, P и Q - середины ребер AB, AD, DC, BC. а) Выпишите все пары равных векторов, изображенных на рисунке. б) Определите вид четырехугольника MNPQ.  3. Задача. Дан параллелепипед $MNPQM_1N_1P_1Q_1$. Докажите, что $\vec{MQ}+\vec{M_1Q_1}=\vec{N_1P_1}+\vec{NP}$.	Уровень I Вариант II 1. Вопрос. Расскажите о правиле треугольника сложения двух векторов. Проиллюстрируйте это правило на рисунках. 2. Задача. Упростите выражение: $\vec{AB}+\vec{MN}+\vec{BC}+\vec{CA}+\vec{PQ}+\vec{NM}$. 3. Задача. Дан параллелепипед $MNPQM_1N_1P_1Q_1$. Докажите, что $\vec{PQ}+\vec{NP_1}=\vec{N_1P_1}+\vec{NQ_1}$.
Уровень II Вариант I 1. Вопрос. Расскажите о правиле параллелограмма сложения двух векторов. Проиллюстрируйте это правило на рисунке. 2. Задача. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Укажите вектор $\vec{x}$, начало и конец которого являются вершинами призмы, такой, что $\vec{AA_1}+\vec{B_1C}-\vec{x}=\vec{BA}$. 3. Задача. Основанием пирамиды с вершиной О является параллелограмм ABCD, диагонали которого пересекаются в точке M. Разложите векторы $\vec{OD}$ и $\vec{OM}$ по векторам $\vec{a}=\vec{OA}, \vec{b}=\vec{OB}$ и $\vec{c}=\vec{OC}$.	Уровень II Вариант II 1. Вопрос. Расскажите о правиле многоугольника сложения нескольких векторов. Проиллюстрируйте это правило на рисунке. 2. Задача. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Укажите вектор $\vec{x}$, начало и конец которого являются вершинами призмы, такой, что $\vec{AC_1}-\vec{BB_1}+\vec{x}=\vec{AB}$. 3. Задача. Точка К - середина ребра B_1C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, Разложите вектор $\vec{AK}$ по векторам $\vec{a}=\vec{AB}, \vec{b}=\vec{AD}$, $\vec{c}=\vec{AA_1}$ и найдите длину этого вектора, если ребро куба равно *m*.

Действия над векторами

1. каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.
2. Вычисление длины вектора по его координатам. $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}+z^2$

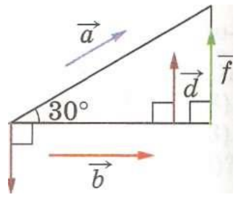
3. Расстояние между двумя точками

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

1. каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.
2. Вычисление длины вектора по его координатам. $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2} + z^2$

3. Расстояние между двумя точками

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



Скалярное произведение векторов

Угол между векторами

Возьмем два произвольных вектора a и b. Отложим от какой-нибудь точки ***O*** векторы ***OA = a*** и OB = b. Если векторы a и b не являются сонаправленными, то лучи OA и OB образуют угол AOB

Градусную меру этого угла обозначим буквой a и будем говорить, что ***угол между векторами a и b равен*** a. Если же векторы a и b сонаправлены, в частности один из них или оба нулевые, то будем считать, что угол между ними равен 0°. Если угол между векторами равен 90°, то векторы называются ***перпендикулярными.***

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла *между ними.* **Скалярное произведение векторов a и b обозначается так:** *ab.*

Таким образом, $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}\vec{b})$

Утверждения:

1.Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

2.*Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины*.

3.По определению скалярного произведения двух ненулевых векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}; \vec{b})$$

Следовательно, если $\vec{a} \neq 0$ и $\vec{b} \neq 0$, то

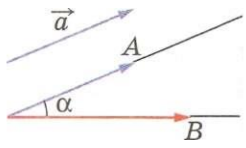


Рис. 133

$$\cos\angle\left(\vec{a};\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|},$$ т.е.

косинус угла между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен скалярному произведению этих векторов, деленному на произведение их длин.

Если: $\vec{a}=(x_1; y_1; z_1)$; $\vec{b}=(x_2; y_2; z_2)$

$$\cos\angle\left(\vec{a};\vec{b}\right)=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

Задачи для самостоятельного решения

Зачёт №1 **«Метод координат в пространстве»** **Вариант 1** **1.** Даны точки **A(5; 0; 2), B(4; -3; 2), C(0; 0; 1), D(2; -4; -4)**. Найдите: а) координаты векторов $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$; б) координаты векторов $\vec{a}=\vec{AB}+\vec{CD}$, $\vec{b}=\vec{AB}-\vec{CD}$, $\vec{c}=-\frac{1}{3}\vec{AB}$; в) длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$; г) скалярное произведение векторов $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$. **2.** Вершины треугольника KMN имеют координаты **K(-2; 3; -2), M(8; 1;2), N(2; -3; 0)**. Найдите: а) координаты середины стороны КМ; б) длины сторон треугольника и определите вид этого треугольника (равносторонний, равнобедренный или разносторонний); в) вычислите косинус угла М и определите вид этого угла (острый, прямой или тупой)	**Зачёт №1** **«Метод координат в пространстве»** **Вариант 2** **1.** Даны точки **A(5; -5; 0), B(-2; 1; -3), C(0; 3; 1), D(1; 3; -4)**. Найдите: а) координаты векторов $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$; б) координаты векторов $\vec{a}=\vec{AB}+\vec{CD}$, $\vec{b}=\vec{AB}-\vec{CD}$, $\vec{c}=\frac{1}{3}\vec{AB}$; в) длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$; г) скалярное произведение векторов $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$. **2.** Вершины треугольника KMN имеют координаты **K(8; 3; 5), M(14; 1;0), N(12; -5; 0)**. Найдите: а) координаты середины стороны КМ; б) длины сторон треугольника и определите вид этого треугольника (равносторонний, равнобедренный или разносторонний); в) вычислите косинус угла М и определите вид этого угла (острый, прямой или тупой)
Зачёт №1 **«Метод координат в пространстве»** **Вариант 3** **1.** Даны точки **A(4; 4; 0), B(1; 0; 5), C(-1; -5; 0), D(10; -1; 0)**. Найдите: а) координаты векторов $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$; б) координаты векторов $\vec{a}=\vec{AB}+\vec{CD}$, $\vec{b}=\vec{AB}-\vec{CD}$, $\vec{c}=\frac{1}{2}\vec{AB}$; в) длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$; г) скалярное произведение векторов $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$. **2.** Вершины треугольника KMN имеют координаты **K(3; 8; -4), M(-5; 8;4), N(-5; 0;-4)**. Найдите: а) координаты середины стороны КМ; б) длины сторон треугольника и определите вид	**Зачёт №1** **«Метод координат в пространстве»** **Вариант 4** **1.** Даны точки **A(3; 0; 3), B(0; -3; 1), C(-1; 2; 1), D(4; 4; -2)**. Найдите: а) координаты векторов $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$; б) координаты векторов $\vec{a}=\vec{AB}+\vec{CD}$, $\vec{b}=\vec{AB}-\vec{CD}$, $\vec{c}=\frac{1}{4}\vec{AB}$; в) длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$; г) скалярное произведение векторов $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$. **2.** Вершины треугольника KMN имеют координаты **K(5; -1; -3), M(1; 6;2), N(9; 6; 2)**. Найдите: а) координаты середины стороны КМ; б) длины сторон треугольника и определите вид

этого треугольника (равносторонний, равнобедренный или разносторонний); в) вычислите косинус угла М и определите вид этого угла (острый, прямой или тупой)	этого треугольника (равносторонний, равнобедренный или разносторонний); в) вычислите косинус угла М и определите вид этого угла (острый, прямой или тупой)

Тема 5
Основы тригонометрии

Краткие теоретические сведения

Радианная мера

Угол в 1 радиан – это такой центральный угол, длина дуги которого равна радиусу окружности. Радианная и градусная меры связаны между собой зависимостью$180^0=\pi$ радиан; угол в $n^0=\dfrac{\pi n}{180^0}$ радиан.

Значения тригонометрических функций могут быть найдены так, как это делалось в курсе геометрии, из прямоугольного треугольника с гипотенузой равной 1 и по очереди задаваемых углов: 30^0, 45^0, 60^0.

Знаки тригонометрических функций по координатным четвертям:

Номер координатной четверти	I	II	III	IV
Sinα	+	+	–	–
Cosα	+	–	–	+
Tgα	+	–	+	–
Ctgα	+	–	+	–

Значения основных тригонометрических функций

Радианная мера угла	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Градусная мера угла	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
*sin*α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
*cos*α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
*tg*α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
*ctg*α	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–

Радианная мера угла	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Градусная мера угла	210^0	225^0	240^0	270^0	300^0	315^0	330^0	360^0
*sin*α	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
*cos*α	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
*tg*α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
*ctg*α	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–

Свойство четности и нечетности

Единственная четная функция – косинус

$cos(-\alpha)=cos\alpha$.

Все остальные основные тригонометрические функции нечетные:

$sin(-\alpha)= -sin\alpha$;

$tg(-\alpha)= -tg\alpha$;

$ctg(-\alpha)= -ctg\alpha$.

Основные тригонометрические тождества:

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$;

$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\ ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$tg\alpha\cdot ctg\alpha=1$;

$$tg^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha};\ ctg^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Формулы сложения:

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$;

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$;

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$;

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$;

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta};\ tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}.$$

Формулы приведения

для преобразования выражений вида:

$$\sin\left(\frac{\pi n}{2}\pm\alpha\right), \cos\left(\frac{\pi n}{2}\pm\alpha\right), \mathrm{tg}\left(\frac{\pi n}{2}\pm\alpha\right), \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi n}{2}\pm\alpha\right), n \in \mathbf{Z}.$$

Для запоминания этих формул удобно пользоваться мнемоническим правилом:

1. Перед приведенной функцией ставится тот знак, который имеет исходная функция в соответствующей координатной четверти:

2. Функция меняется на «кофункцию», если n нечетно; функция не меняется, если n четно. (Кофункциями синуса, косинуса, тангенса и котангенса называются соответственно косинус, синус, котангенс, тангенс).

Формулы двойного угла тригонометрических функций:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha},$$

$$ctg2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}.$$

Подставляя в формулы $\cos 2t=1-2\sin^2 t$ и $\cos 2t=2\cos^2 t-1$ значение $t=\frac{\alpha}{2}$, получаем

Формулы половинного аргумента:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2},$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}.$$

Разделив $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$ на $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$ получаем формулу

$$tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\ \ \alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi k,\ \ \beta \neq \frac{\pi}{2}+\pi k,$$

$$tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\ \ \alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi k,\ \ \beta \neq \frac{\pi}{2}+\pi k.$$

Для преобразования произведения тригонометрических функций в сумму применяются формулы:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin\left(\alpha+\beta\right)+\sin\left(\alpha-\beta\right)\right),$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha+\beta\right)+\cos\left(\alpha-\beta\right)\right),$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha-\beta\right)-\cos\left(\alpha+\beta\right)\right).$$

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Пример 1 .

Вычислите: $\sin 405^0$.

Решение:

полный круг – 360^0 можно «отбросить»:

$\sin 405^0=\sin(405^0-360^0)=\sin 45^0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Пример 2.

Выразите в радианной мере значение угла 36^0.

Решение:

чтобы «перевести» градусную меру угла в радианную, необходимо заданное значение умножить на $\dfrac{\pi}{180^0}$, т.о. получим

$36^0=\dfrac{36^0\pi}{180^0}=\dfrac{\pi}{5}$.

Пример 3.

Выразите в градусной мере значение угла $\dfrac{2\pi}{5}$.

Решение:

чтобы «перевести» радианную меру угла в градусную, необходимо заданное значение умножить на $\dfrac{180^0}{\pi}$, т. о. получим

$$\frac{2\pi}{5}\cdot\frac{180^0}{\pi}=\frac{360^0}{5}=72^0.$$

Задачи для самостоятельного решения

1 вариант	2 вариант	3 вариант
№1. Выразите в радианной (градусной) мере значение угла: 60^0; $\dfrac{\pi}{6}$. №2. Вычислите:	№1. Выразите в радианной (градусной) мере значение угла: 180^0; $\dfrac{3\pi}{5}$. №2. Вычислите:	№1. Выразите в радианной (градусной) мере значение угла: 270^0; $\dfrac{5\pi}{36}$. №2. Вычислите:

$\sin 2010^0 + 4tg(-855^0) +$ $+\sqrt{3}\cos(-1590^0).$	$\sqrt{2}\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right) - 6\cos\left(-\frac{22\pi}{3}\right) +$ $+2tg\frac{15\pi}{4} - \sqrt{3}ctg\frac{23\pi}{6}.$	$\sin\left(-390^0\right) + 4tg(-405^0) +$ $+\sqrt{3}\cos^2(-420^0).$
4 вариант №1. Выразите в радианной (градусной) мере значение угла: 120^0; $\frac{3\pi}{4}$. №2. Вычислите: $\sin 1500^0 + tg(-765^0) +$ $+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(1845^0).$	**5 вариант** №1. Выразите в радианной (градусной) мере значение угла: 310^0; $\frac{\pi}{3}$. №2. Вычислите: $\sqrt{2}\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) - 6\cos\left(-\frac{11\pi}{3}\right) +$ $+2tg\frac{9\pi}{4} - \sqrt{3}ctg\left(-\frac{23\pi}{6}\right).$	**6 вариант** №1. Выразите в радианной (градусной) мере значение угла: 360^0; $\frac{5\pi}{4}$. №2. Вычислите: $\cos 2160^0 + ctg(855^0) +$ $+\sqrt{3}\sin(-1590^0).$

Пример 4.

Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: sinα=-0,8 и π<α<1,5π.

Решение:

используя основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, имеем:
$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$, тогда $\cos^2\alpha=1-(-0,8)^2=1-0,64=0,36$.
Т. к. π<α<1,5π (III координатная четверть), то cosα=-0,6.

По формуле $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ вычисляем $tg\alpha = \frac{-0,8}{-0,6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

По формуле tgα·ctgα=1 вычисляем ctgα=1. $\frac{3}{4} = \frac{4}{3}$:

Задачи для самостоятельного решения

1 вариант 1) Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: cosα=$-\frac{\sqrt{6}}{4}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	**2 вариант** 1) Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: sinα=$\frac{\sqrt{2}}{3}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.	**3 вариант** 1) Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: cosα=$\frac{15}{17}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.
4 вариант 1) Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: sinα=0,5 и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.	**5 вариант** 1) Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: cosα=0,4 и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.	**6 вариант** 1) Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: sinα=$\frac{\sqrt{3}}{5}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Краткие теоретические сведения

Уравнение	Формулы решения	Частные случаи
$\sin x = a$	при $\|a\| \le 1$ $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$, $k \in z$ при $\|a\| > 1$ - решений нет	$\sin x = 0$; $x = \pi k$, $k \in z$ $\sin x = 1$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in z$ $\sin x = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in z$
$\cos x = a$	при $\|a\| \le 1$ $x = \pm\arccos a + 2\pi n$, $n \in z$ при $\|a\| > 1$ - решений нет	$\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in z$ $\cos x = 1$; $x = 2\pi n$, $n \in z$ $\cos x = -1$; $x = \pi + 2\pi n$, $n \in z$
$tgx = a$	a - любое число $x = arctga + \pi k$, $k \in z$	-
$ctgx = a$	a - любое число $x = arcctga + \pi k$, $k \in z$	-

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Пример 1.

Решите уравнение: $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение:

по формуле $t = (-1)^k \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi k$, ($k \in \mathbf{Z}$).

Поскольку $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi/4$ приходим к ответу $t = (-1)^k\, \pi/4 + \pi k$, ($k \in \mathbf{Z}$).

Пример 2.

Решите уравнение: $\sin\left(\frac{\pi}{10} - \frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение:

функция синус нечетная, поэтому $\sin\left(\frac{\pi}{10} - \frac{x}{2}\right) = -\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{10}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Тогда по формуле: $\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{10}\right) = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi k$, ($k \in \mathbf{Z}$).

Т.к. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$, имеем

$\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{10}\right) = (-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \pi k$, ($k \in \mathbf{Z}$)

или

$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{10} + (-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \pi k$, ($k \in \mathbf{Z}$).

Умножив обе части уравнения на 2, получим ответ:

$x = \frac{\pi}{5} + (-1)^{k+1}\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\pi k$, ($k$ Є **Z**).

Пример 3.

Решите уравнение: tg t= $\sqrt{3}$.

Решение:

по формуле t=arctg($\sqrt{3}$)+πn, (n Є **Z**).

Поскольку arctg($\sqrt{3}$)= $\frac{\pi}{3}$ приходим к ответу t= $\frac{\pi}{3}$ +πn, (n Є **Z**).

Задачи для самостоятельного решения

1 вариант	**2 вариант**	**3 вариант**
1) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$; 2) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$; 3) $tg2x = \sqrt{3}$.	1) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $tg2x = -\sqrt{3}$.	1) $\sin 2x = \frac{1}{2}$; 2) $2\cos x = \sqrt{2}$; 3) $tg\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
4 вариант	**5 вариант**	**6 вариант**
1) $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos\frac{x}{4} = \frac{4}{5}$; 3) $tg\left(2x - \frac{\pi}{10}\right) = 0$.	1) $\sin x = \frac{3}{5}$; 2) $\cos(1 - x) = \frac{1}{2}$; 3) $tg\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 3$.	1) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$; 2) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$; 3) $ctg\frac{x}{2} = -\sqrt{3}$.

Тема 6.
Функции и графики.

Краткие теоретические сведения

Функции их свойства и графики

1. Примеры задания функции формулой.

1)y = $\frac{1}{2}x + 1$;

2)y = 1 - x;

3)y = x^2 + 2x;

4)y = $-x^2$ + 2;

5)y = $-\frac{1}{x}$;

6)y = |x+1|

7)y = $\sqrt{x + 1}$

8)y = x^2

9)y = $\frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})$;

10)y = [x]

11)y = $\begin{cases} -x \text{ при } x < 0, \\ x^2 \text{ при } x \geq 0; \end{cases}$

12)y = x $-\frac{1}{x}$.

2.Примеры словесного задания функции.

1)x -любое число, y(x) - целая часть числа x, т.е набольшее целое число, не превосходящее x. Обозначение: y =[x];

2)x - любое число, y(x) - знак числа x,т.е число +1 при x>0; число 0, если x = 0; число -1 при x<0. Обозначение: y=sinx;

3) x - любое натуральное число, y(x) - произведение всех целых чисел от 1 до x включительно. Обозначение: y = x! (x факториал). Независимая переменная, принимающая натуральные значения, обычно обозначается буквой n, поэтому привычнее запись y=n!.

3.Примеры проследования функций, заданных формулой с областью определения D.

1) y = x^2-1, D: R или x - любое число.

2) y = $\sqrt{1-x^2}$, D:[-1;1]

3)y = $\frac{1}{x-1}$, D: x$\neq$ 1или x - любое число, кроме x = 1

4)y = $\sqrt{x}$, D: [0;+∞) или x - любое неотрицательное число.

4. Нули функции.

1) y = 2x - 1, один нуль: $x = \frac{1}{2}$;

2)y = x^2 + x - , нули: $x_1 = 0, x_2 = -1$

3)y = x^2 + x +5 , нулей нет.

4) y = x -[x], нули. Все числа

5.Промежутки знакопостоянства функции.

1)y = $\frac{1}{x-2}$, y <0 при x<2, y>0 при x>2; или y < 0 при x ϵ(-∞; 2), y > 0 при x ϵ(2; +∞).

2) y = $\sqrt{x} - 2, y < 0$ при xϵ[0;4); y>0 при x ϵ(4; +∞).

3)y = $\frac{1}{x^2-2}$, y<0 при x ϵ (-$\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$);y>0 при x ϵ(-∞; $\sqrt{2}$)U($\sqrt{2}$; +∞)

6. Точки экстремума функции.

1)y = $\frac{1}{x}$ экстремума нет.

2)y = $x^2 - 2x$, x = 1 -точка минимума. Значение y в этой точке равно -1: y(1) = -1.

7.Промежутки монотонности функции.

1) y = 1 -x, функция y убывает на всей числовой оси;

2)y=x^2-1, функция y убывает на промежутке(-∞;0] и возрастает на промежутке [0;+∞);

3)y$-\frac{1}{x}$, функция y возрастает на каждом из промежутков (-∞;0) и (0;+∞);

4)y = x^3 + x, функция y возрастает на всей числовой оси.

8.наибольшее и наименьшее значения функции.

1) y = -x-1; функция не имеет ни наибольшей, ни наименьшего значений.

2)y=-x, x ϵ[-1;1]; наибольшее и наименьшее значения функция принимает на концах промежутка: y(-1) = 1 - наибольшее значение; y(1) = - 1 - наименьшее значение.

3)y=x^2 - 1; наименьшее значение функция принимает при x = 0, y(0) = -1. Наибольшего значения у функции нет.

4)y = - x^2 + 2x, x $\in$ [1;3]: наибольшее и наименьшее значения.

9. Множество значений E функции.

1)y = -x, E: R или y - любое число;

2)y = -x, x $\in$ [-1;1], E[-1;1];

3)y = x^2+ 1, E:[1; +∞)

4)y = -x^2 + 2x, x $\in$[0;3], E[-3;1] или -3 $\leq$ y $\leq$ 1.

10. Симметрия и периодичность графика функции.

1)y = x^2- 1 - четная функция.

2)y = $\frac{2x}{x^2+1}$ - нечетная функция.

3)y = $\cos x$ - четная периодическая функция.

4)y = $\sin x$ - нечетная периодическая функция.

11.Ограниченность функции.

1) y = $\frac{2x}{x^2+1}$ - ограниченная функция. При всех x значения функции неотрицательны и меньше единицы, следовательно, мы можем написать 0$\leq$ y $\leq$ 1.

2) y = x^2 - функция, не являющаяся ограниченной.

Прямая пропорциональность. Линейная функция.
Обратная пропорциональность. Гипербола.
Квадратичная функция. Квадратная парабола.
Степенная функция. Показательная функция.
Логарифмическая функция. Тригонометрические функции.
Обратные тригонометрические функции.

1. ***Пропорциональные величины.*** Если переменные y и x *прямо пропорциональны*, то функциональная зависимость между ними выражается уравнением:

$$y = kx,$$

где k - постоянная величина (*коэффициент пропорциональности*).
График *прямой пропорциональности* – прямая линия, проходящая через начало координат и образующая с осью X угол α, тангенс которого равен k : $\tan\alpha = k$ (рис.8). Поэтому, коэффициент пропорциональности называется также *угловым коэффициентом*. На рис.8 показаны три графика для k = 1/3, k = 1 и k = □3 .

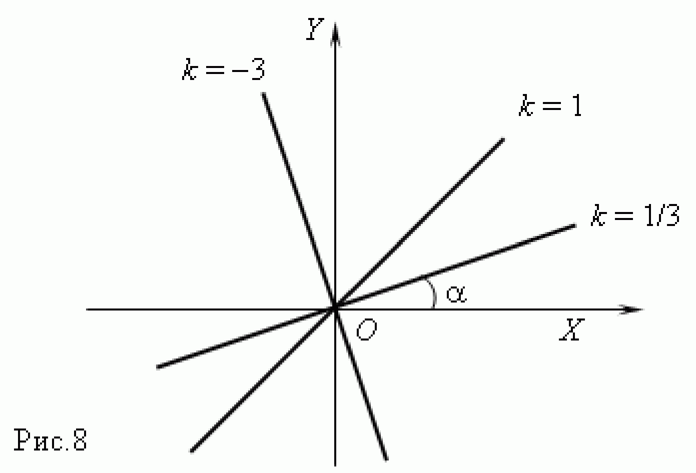


Рис.8

2. ***Линейная функция.*** Если переменные y и x связаны уравнением 1-ой степени:

$A\,x + B\,y = C$,

где по крайней мере одно из чисел A или B не равно нулю, то графиком этой функциональной зависимости является *прямая линия*. Если $C = 0$, то она проходит через начало координат, в противном случае - нет. Графики линейных функций для различных комбинаций A, B, C показаны на рис.9.

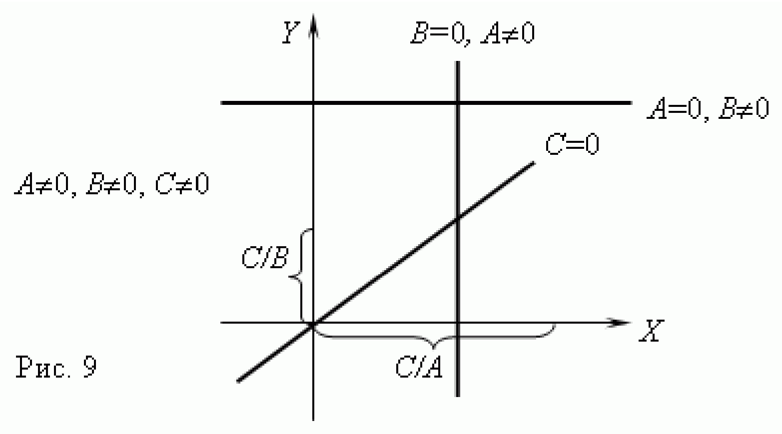


Рис. 9

3. ***Обратная пропорциональность.*** Если переменные y и x *обратно пропорциональны*, то функциональная зависимость между ними выражается уравнением:

$$y = k\,/\,x\ ,$$

где k - постоянная величина.

График обратной пропорциональности – *гипербола* (рис.10). У этой кривой две ветви. Гиперболы получаются при пересечении кругового конуса плоскостью Как показано на рис.10, произведение координат точек гиперболы есть величина постоянная, в нашем примере равная 1. В общем случае эта величина равна k, что следует из уравнения гиперболы: $xy = k$.

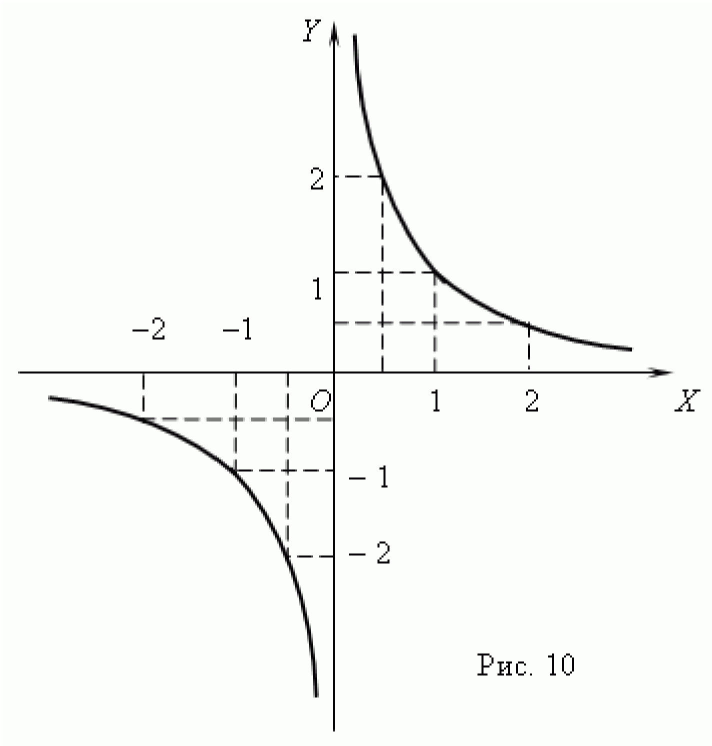
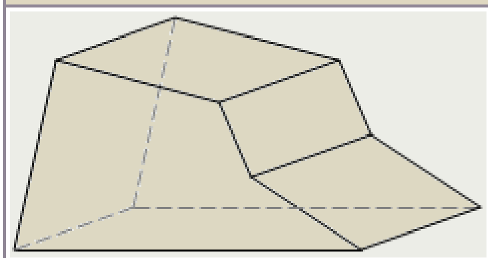


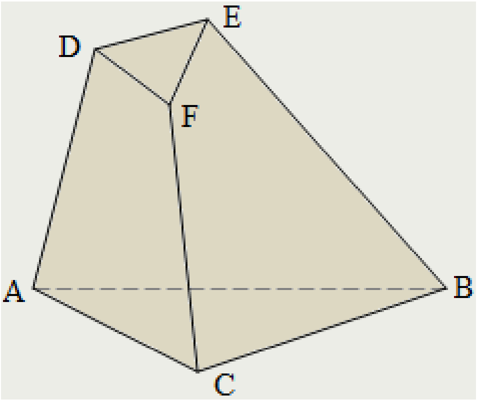
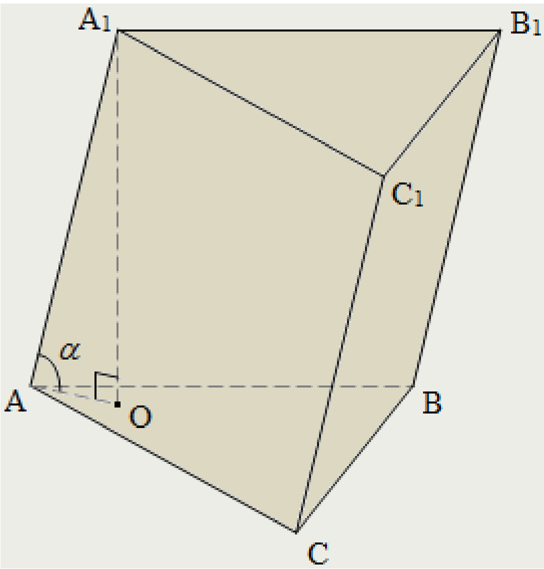
Рис. 10

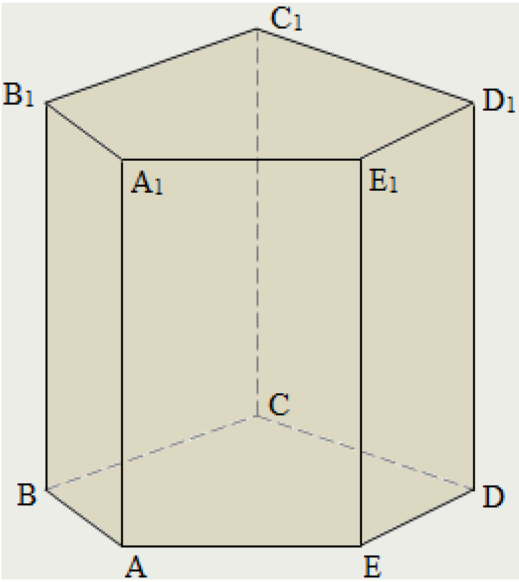
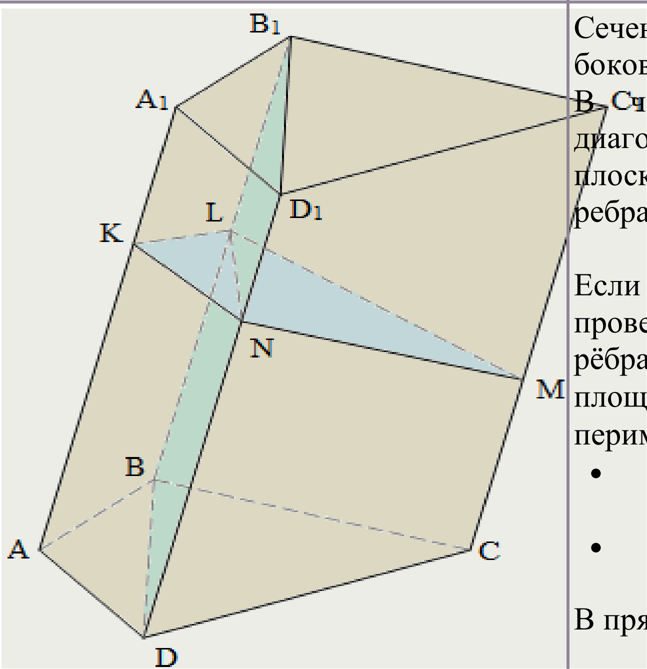
Основные характеристики и свойства гиперболы:

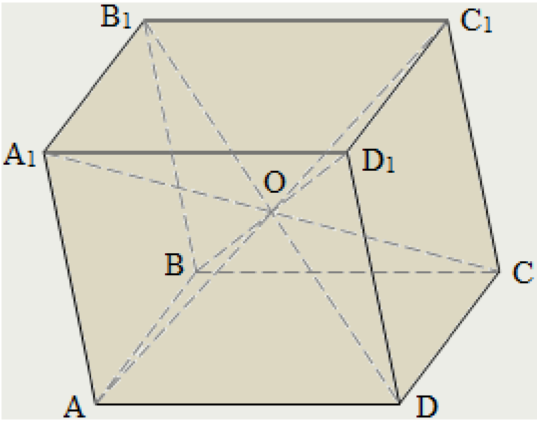
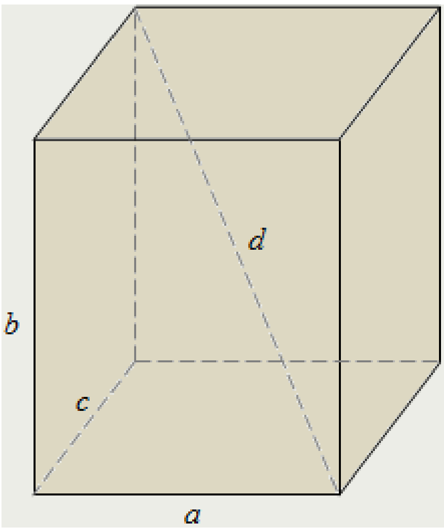
- область определения функции: $x \neq 0$, область значений: $y \neq 0$;
- функция монотонная (убывающая) при $x < 0$ и при $x > 0$, но не монотонная в целом из-за точки разрыва $x = 0$ (подумайте, почему ?);
- функция неограниченная, разрывная в точке $x = 0$, нечётная, непериодическая;
- нулей функция не имеет.

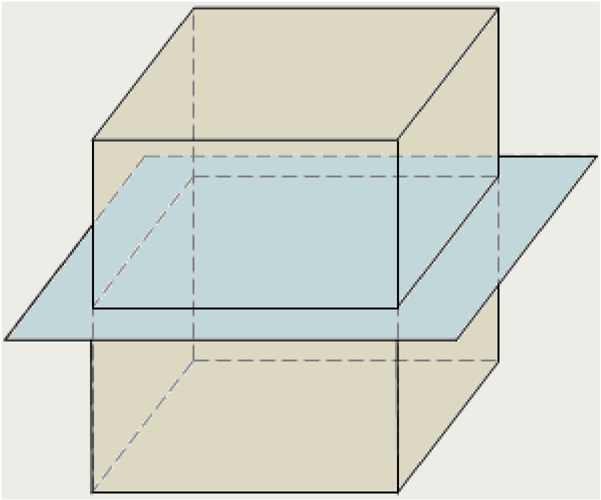
Тема 7
Многогранники и тела вращения
Краткие теоретические сведения
Многогранники

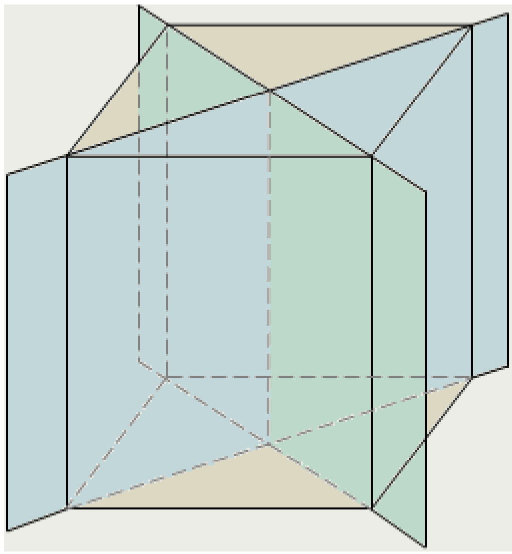
Основные понятия	
	Некоторые пространственные фигуры, изучаемые в стереометрии, называют телами или геометрическими телами. Наглядно тело надо представлять себе как часть пространства, занятую физическим телом и ограниченную поверхностью. Многогранником называется геометрическое тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников.

 	Выпуклым называется многогранник, если он расположен по одну сторону плоскости, проведённой через любой многоугольник, образующий поверхность данного многогранника. Многоугольники, составляющие поверхность многогранника, называются его гранями; стороны многоугольников – рёбрами; вершины – вершинами многогранника: ABC, DEF, ABED, BCFE, ACFD – грани; AB, BC, AC, DE, EF, DF, AD, BE, CF – рёбра; A, B, C, D, E, F – вершины многогранника ABCDEF. *Теорема Эйлера для многогранников*: Если V — число вершин выпуклого многогранника, R — число его ребер и G — число граней, то верно равенство: $V - R + G = 2.$
Призма	
 	Призмой называется многогранник, состоящий из двух плоских многоугольников, которые лежат в разных плоскостях и совмещаются параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников. Многоугольники, о которых шла речь, называются основаниями призмы, а отрезки, соединяющие их соответствующие вершины – боковыми рёбрами призмы. Основания призмы равны и лежат в параллельных плоскостях. Боковые рёбра призмы равны и параллельны. Поверхность призмы состоит из двух оснований и боковой поверхности. Боковая поверхность любой призмы состоит из параллелограммов, у каждого из которых две стороны являются соответствующими сторонами оснований, а две другие – соседними боковыми рёбрами. Высотой призмы называется любой из перпендикуляров, проведённых из точки одного основания к плоскости другого основания призмы. Призма называется *n*-угольной, если её основание – *n*-угольник. $ABCA_1B_1C_1$ – треугольная призма; ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ – основания; AA_1, BB_1, CC_1 – боковые рёбра; AA_1B_1B, AA_1C_1C, BB_1C_1C – боковые грани; A_1O – высота призмы; α – угол наклона бокового ребра к

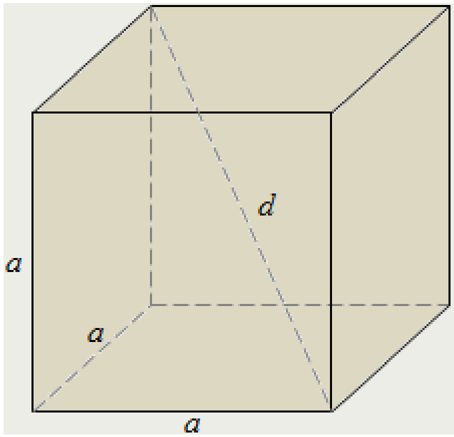
	основанию призмы.
	Призма называется прямой, если её рёбра перпендикулярны плоскостям оснований. В противном случае призма называется наклонной. Боковые грани прямой призмы – прямоугольники. Боковое ребро прямой призмы является её высотой. Боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы: $S_{б} = P_{осн} \cdot AA_1$. Прямая призма называется правильной, если её основания являются правильными многоугольниками.
	Сечения призмы плоскостями, параллельными боковым рёбрам,являются параллелограммами. В частности, параллелограммами являются диагональные сечения. Это сечения плоскостями, проходящими, через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани: BB_1D_1D – диагональное сечение. Если в произвольной наклонной призме провести сечение, перпендикулярное боковым рёбрам и пересекающее все боковые рёбра, и площадь этого сечения обозначить $S_{\perp}$, а периметр – $P_{\perp}$, тогда: • для боковой поверхности призмы верно: $S_{б} = P_{\perp} \cdot AA_1$; • для объёма призмы верно: $V = S_{\perp} \cdot AA_1$. В прямой призме: $S_{\perp} = S_{осн}$; $P_{\perp} = P_{осн}$. В любой призме площадь полной поверхности считается как сумма площади боковой поверхности и удвоенной площади основания: $S_{п} = S_{б} + 2 \cdot S_{осн}$.

Параллелепипед	
 	Призма, в основании которой лежит параллелограмм, называется параллелепипедом. У параллелепипеда все грани – параллелограммы. Грани параллелепипеда, не имеющие общих вершин, называются противолежащими. У параллелепипеда противолежащие грани параллельны и равны. Диагональю параллелепипеда, как и многогранника вообще, называется отрезок, соединяющий вершины параллелепипеда, не лежащие в одной его грани. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам. Точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии.
 	Прямоугольным параллелепипедом называется такой прямой параллелепипед, в основании которого лежит прямоугольник. Все грани прямоугольного параллелепипеда являются прямоугольниками. Длины рёбер прямоугольного параллелепипеда, выходящих из одной вершины, называются его измерениями или линейными размерами. У прямоугольного параллелепипеда три измерения. В прямоугольном параллелепипеде квадрат любой диагонали равен сумме квадратов трёх его измерений: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$. В прямоугольном параллелепипеде верно: • для площади полной поверхности: $S_п = 2 \cdot (ab+bc+ac)$; • для объёма: $V = abc$.





В прямоугольном параллелепипеде, как и во всяком параллелепипеде, есть центр симметрии – точка пересечения его диагоналей. У него есть также три плоскости симметрии, проходящие через центр симметрии параллельно парам противолежащих граней. На первом рисунке, приведённом выше, показана одна из таких плоскостей. Она проходит через середины четырех параллельных ребер параллелепипеда.
Если у параллелепипеда все линейные размеры разные, то у него нет других плоскостей симметрии, кроме трёх названных.
Если же у параллелепипеда два линейных размера равны, то есть он является правильной четырёхугольной призмой, то у него есть еще две плоскости симметрии. Это плоскости диагональных сечений, показанные на втором рисунке.



Прямоугольный параллелепипед, у которого все три измерения равны, называется кубом.
Диагональ куба в квадратный корень из трёх раз больше его стороны:

$$d = a\sqrt{3}.$$

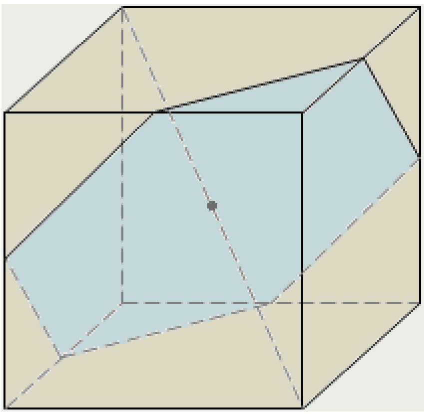
В кубе верно:

- для площади полной поверхности:

$$S_п = 6\cdot a^2, \quad S_п = 2\cdot d^2,$$

- для объёма:

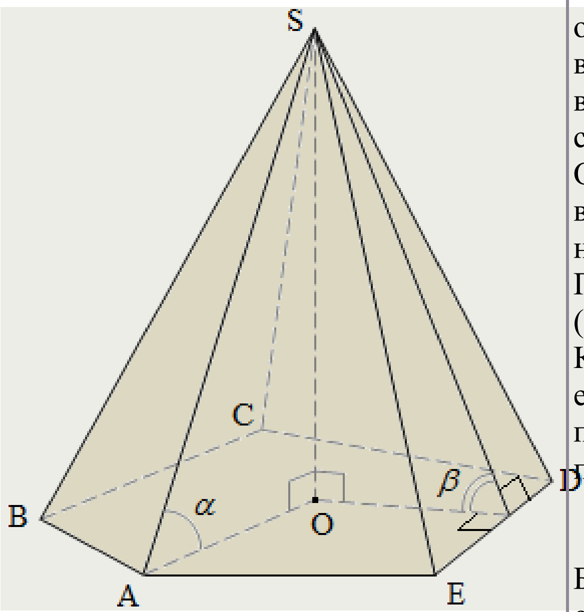
$$V = a^3, \quad V = \frac{d^3}{3\sqrt{3}}.$$

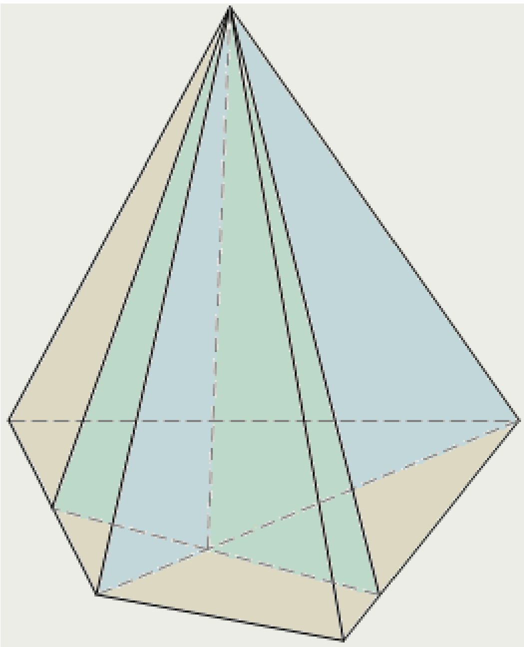


Четыре сечения куба являются правильными шестиугольниками (одно из них показано на рисунке) – эти сечения проходят через центр куба перпендикулярно четырём его диагоналям.
У куба девять плоскостей симметрии:

- три из них, проходя через середины четырёх параллельных ребер куба, дают в сечениях квадраты;
- остальные шесть – это все плоскости диагональных сечений куба.

Пирамида





Пирамидой (например, SABCDE) называется многогранник, который состоит из плоского многоугольника (пятиугольник ABCDE) – основания пирамиды, точки (S), не лежащей в плоскости основания,– вершины пирамиды и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с точками основания.

Отрезки (SA, SB, SC, SD, SE), соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания, называются боковыми ребрами.

Поверхность пирамиды состоит из основания (пятиугольник ABCDE) и боковых граней. Каждая боковая грань – треугольник. Одной из его вершин является вершина пирамиды, а противолежащей стороной – сторона основания пирамиды:

$\Delta SAB, \Delta SBC, \Delta SCD, \Delta SDE, \Delta SEA$ – боковые грани.

Боковой поверхностью пирамиды называется сумма площадей ее боковых граней.

Высотой пирамиды (SO) называется перпендикуляр, проведённый из вершины пирамиды к плоскости основания.

Пирамида называется n-угольной, если ее основанием является n-угольник. Треугольная пирамида называется также тетраэдром.

α – угол наклона бокового ребра SA пирамиды к плоскости её основания;

β – угол наклона боковой грани (SED) пирамиды к плоскости её основания.

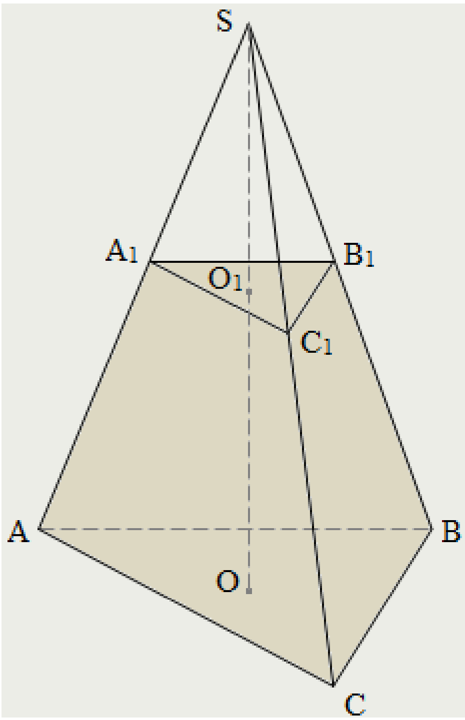
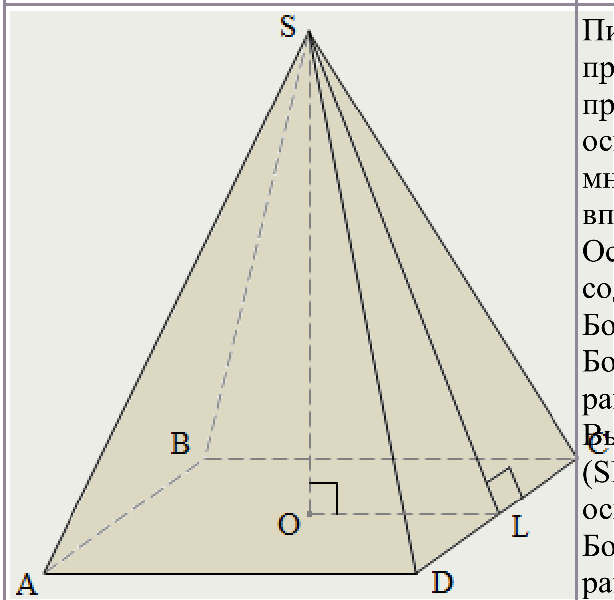
Основание высоты пирамиды является центром окружности, описанной около основания пирамиды, тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:

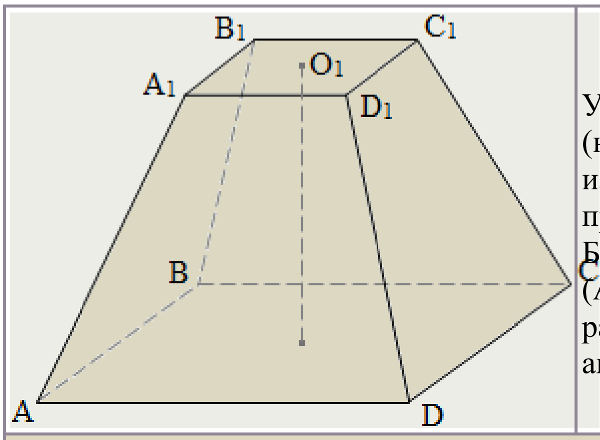
- все боковые ребра равны;
- боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы;
- боковые ребра образуют равные углы с высотой пирамиды.

Основание высоты пирамиды является центром окружности, вписанной в основание пирамиды, тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:

- боковые грани наклонены к плоскости основания под одним углом;
- высоты боковых граней равны;
- боковые грани образуют равные углы с высотой пирамиды.

Объём пирамиды равен трети произведения

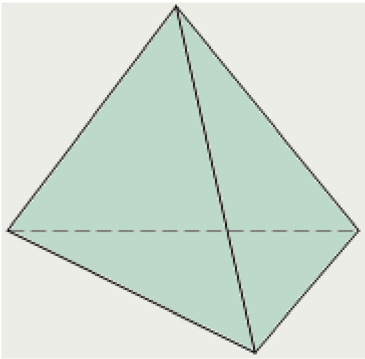
<table>
<tr>
<td></td>
<td>площади основания на высоту пирамиды:
$V = 1/3 \cdot S_{осн}h.$
Площадь полной поверхности любой пирамиды равна сумме площадей боковой поверхности и основания:
$S_п = S_б + S_{осн}.$
Сечения пирамиды плоскостями, проходящими через ее вершину, представляют собой треугольники. В частности, треугольниками являются диагональные сечения. Это сечения плоскостями, проходящими через два несоседних боковых ребра пирамиды.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Плоскость, которая пересекает пирамиду и параллельна её основанию, делит её на две части:
пирамиду, подобную данной ($SA_1B_1C_1$) и
многогранник, называемый усеченной пирамидой ($ABCA_1B_1C_1$).
Грани усеченной пирамиды, лежащие в параллельных плоскостях (ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$), называются основаниями, остальные грани (AA_1B_1B, AA_1C_1C, BB_1C_1C)
называются боковыми гранями.
Основания усеченной пирамиды представляют собой подобные многоугольники, боковые грани – трапеции.
Высота усеченной пирамиды (OO_1) – это расстояние между плоскостями её оснований.
Если S_1 и S_2 – площади оснований усечённой пирамиды и h – её высота, то для объёма усеченной пирамиды верно:
$$V = \frac{1}{3}h\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right).$$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Пирамида (например, SABCD) называется правильной, если ее основанием является правильный многоугольник (ABCD – квадрат), а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника (O – центр описанной и вписанной окружностей основания).
Осью правильной пирамиды называется прямая, содержащая ее высоту.
Боковые ребра правильной пирамиды равны.
Боковые грани правильной пирамиды – равные равнобедренные треугольники.
Высота боковой грани правильной пирамиды (SL), проведенная из ее вершины к стороне основания, называется апофемой.
Боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания на апофему:
$S_б = ½P_{осн} \cdot SL.$</td>
</tr>
</table>

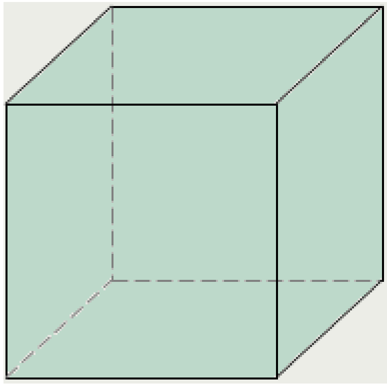


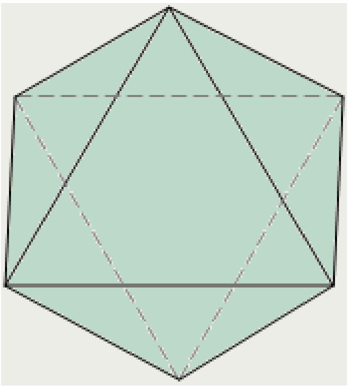
Усеченная пирамида (например, $ABCDA_1B_1C_1D_1$), которая получается из правильной пирамиды, также называется правильной.

Боковые грани правильной усеченной пирамиды (AA_1B_1B, AA_1C_1C, DD_1C_1C, AA_1D_1D) – равные равнобокие трапеции; их высоты называются апофемами.

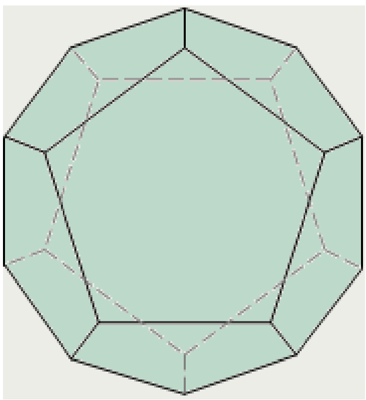
Правильные многогранники



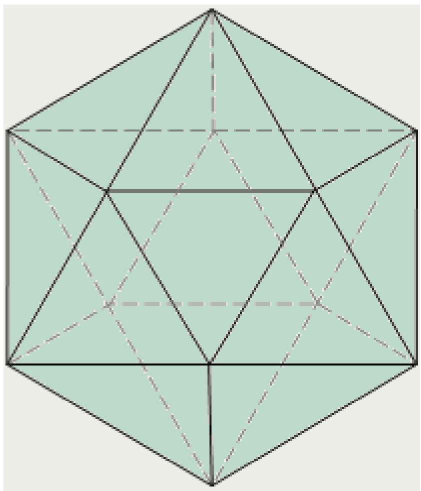




Тетраэдр Куб Октаэдр



Додекаэдр



Икосаэдр

Выпуклый многогранник называется правильным, если его грани являются правильными многоугольниками с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине многогранника сходится одно и то же число ребер.

Существует пять типов правильных выпуклых многогранников: правильный тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр.

У правильного тетраэдра грани – правильные треугольники; в каждой вершине сходится по три ребра. Тетраэдр представляет собой треугольную пирамиду, у которой все ребра равны.

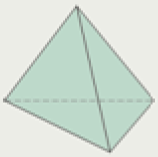
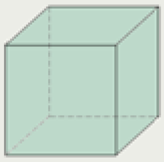
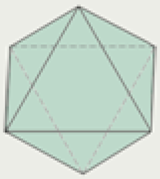
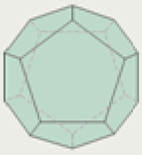
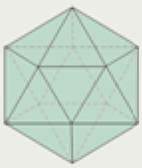
У куба (правильный гексаэдр) все грани – квадраты; в каждой вершине сходится по три ребра. Куб представляет собой прямоугольный параллелепипед с равными ребрами.

У октаэдра грани – правильные треугольники, но в отличие от тетраэдра в каждой его вершине сходится по четыре ребра.

У додекаэдра грани – правильные пятиугольники. В каждой вершине сходится по три ребра.

У икосаэдра грани – правильные треугольники, но в отличие от тетраэдра и октаэдра в каждой вершине сходится по пять ребер.

Некоторые характеристики правильных многогранников

Многогранники	*1 – число сторон у каждой грани 2 – число вершин 3 – число рёбер 4 – число граней 5 – число рёбер при вершине*					*a – длина ребра многогранника S – площадь полной поверхности V – объём многогранника R – радиус описанной сферы r – радиус вписанной сферы*			
	1	2	3	4	5	S	V	R	r
	3	4	6	4	3	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$	$\frac{\sqrt{6}}{4}a$	$\frac{\sqrt{6}}{12}a$
	4	8	12	6	3	$6a^2$	a^3	$\frac{\sqrt{3}}{2}a$	$\frac{1}{2}a$
	3	6	12	8	4	$2a^2\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$	$\frac{\sqrt{2}}{2}a$	$\frac{\sqrt{6}}{6}a$
	5	20	30	12	3	$3a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$	$\frac{a^3}{4}(15+7\sqrt{5})$	$\frac{a\sqrt{3}}{4}(1+\sqrt{5})$	$\frac{a}{4}\sqrt{10+}$
	3	12	30	20	5	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{5}{12}(3+\sqrt{5})a^3$	$\frac{a}{4}\sqrt{2(5+\sqrt{5})}$	$\frac{a}{4\sqrt{3}}(3+$

Задачи для самостоятельного решения

Призма. Параллелепипед. Куб.

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $D_1B=\sqrt{26}$, $BB_1=3$, $A_1D_1=4$. Найдите длину ребра A_1B_1.

2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AC_1=\sqrt{65}$, $BB_1=5$, $B_1C_1=6$. Найдите длину ребра D_1C_1.

3. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 1900 см^3 воды и погрузили в воду деталь. При этом уровень воды поднялся с отметки 20 см до отметки 22 см. Найдите объём детали. Ответ выразите в см^3.

4. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 4 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если её перелить в другой такой же сосуд, у которого сторона основания в 2 раза больше, чем у первого?

5. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 32 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если её перелить в другой такой же сосуд, у которого сторона основания в 4 раза больше, чем у первого?

<u>Пирамида.</u>

1.Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна $\sqrt{2}$, высота пирамиды – $\sqrt{3}$. Найти площадь полной поверхности и объём пирамиды.

2. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна $\sqrt{2}$, боковое ребро пирамиды наклонено к плоскости основания под углом $45°$. Найти площадь полной поверхности и объём пирамиды.

3.В основании правильной четырёхугольной пирамиды лежит квадрат с диагональю, равной $\sqrt{3}$. Боковые ребра пирамиды также равны $\sqrt{3}$. Найти площадь полной поверхности и объём пирамиды.

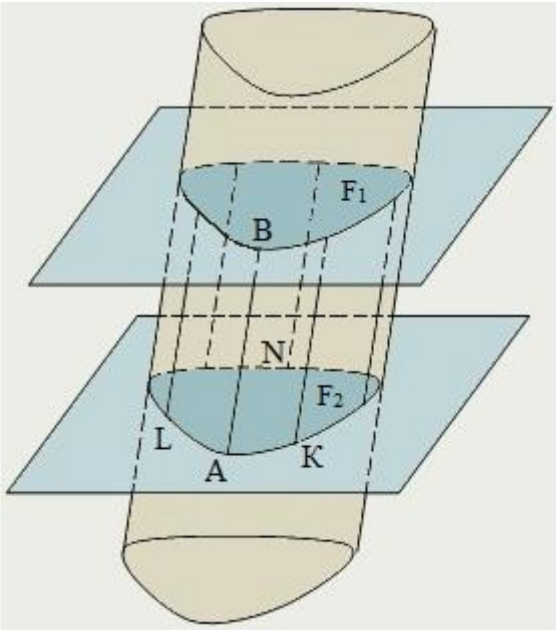
4.Каждое из боковых рёбер пирамиды равно 12см. Основание пирамиды – треугольник со сторонами 7см, 8см и 13см. Найти объём пирамиды.

(Указание: площадь основания по формуле Герона $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, радиус описанной окружности $R=\frac{a\cdot b\cdot c}{4S}\approx 7{,}5$; высота по теореме Пифагора из ΔSOC: $h=\sqrt{SC^2-R^2}\approx 9{,}37$; объём $V=\frac{1}{3}S\cdot h\approx 75{,}7$).

5.Боковое ребро правильной шестиугольной пирамиды равно 4 и составляет угол $30°$ с высотой пирамиды. Найти объём пирамиды.

Тела вращения

<table>
<tr><th colspan="2">Цилиндр</th></tr>
<tr>
<td>



</td>
<td>

Цилиндрическая поверхность – поверхность, образуемая движением прямой (в каждом своём положении называемой образующей) вдоль кривой (называемой направляющей) так, что прямая постоянно остаётся параллельной своему начальному положению.

Прямая AB – образующая;

кривая AKNLA – направляющая.

Бесконечный цилиндр – тело, ограниченное цилиндрической поверхностью.

Цилиндр – геометрическое тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя параллельными плоскостями, пересекающими её.

Часть поверхности цилиндра, ограниченная цилиндрической поверхностью, называется *боковой поверхностью цилиндра*.

Высотой цилиндра называется расстояние между плоскостями его оснований.

Другая часть, ограниченная параллельными плоскостями – это *основания цилиндра*.

Отрезок AB – образующая;

фигуры F_1 и F_2 – основания.

У цилиндра:

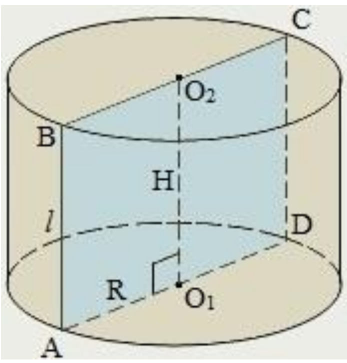
- основания равны;
- образующие параллельны и равны.

Боковая поверхность всякого цилиндра равна произведению образующей на периметр перпендикулярного сечения.

Объём всякого цилиндра равен произведению площади основания на высоту:

$$V = SH.$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>



</td>
<td>

Цилиндр, у которого основания перпендикулярны образующим и являются кругами, называется *прямым круговым цилиндром*(часто, и далее, – просто *цилиндром*).

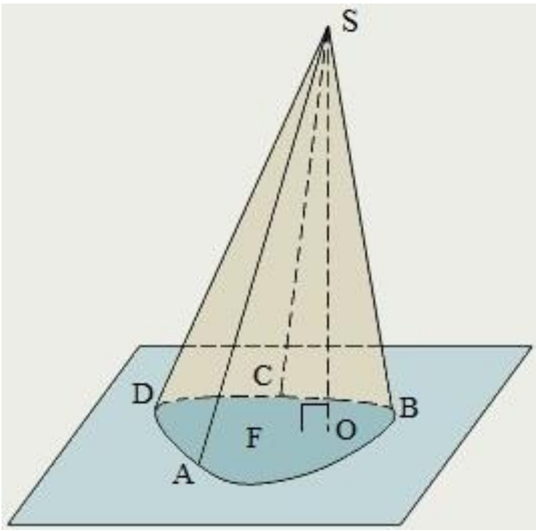
Прямой круговой цилиндр можно получить вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон.

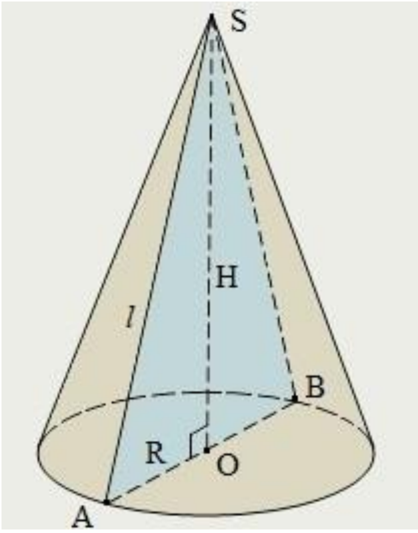
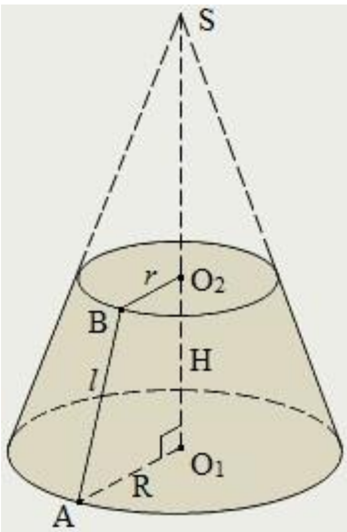
Радиусом цилиндра называется радиус его основания.

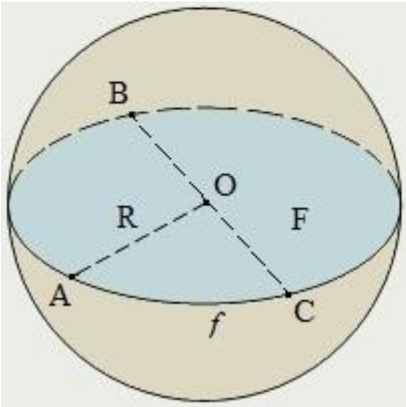
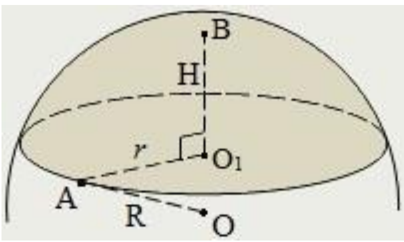
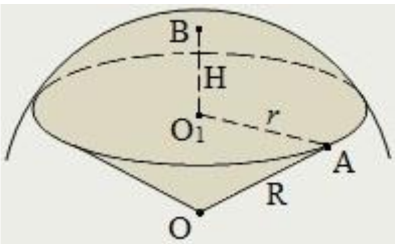
Осью цилиндра называется прямая, проходящая через центры его оснований. Ось цилиндра параллельна образующим.

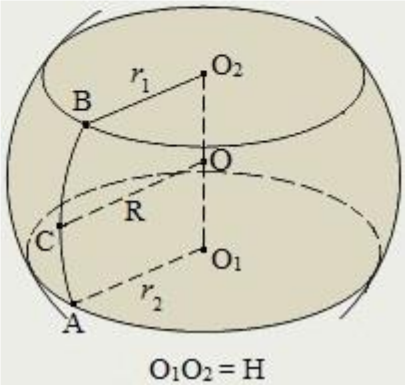
Осевым сечением цилиндра называется сечение цилиндра плоскостью, проходящей через его ось. Осевым сечением цилиндра (прямого кругового цилиндра) является прямоугольник.

</td>
</tr>
</table>

	AO_1 – радиус цилиндра; AB, CD – образующие цилиндра; O_1O_2 – ось цилиндра; AB, CD, O_1O_2 – высоты цилиндра; ABCD – осевое сечение цилиндра. Боковая поверхность прямого кругового цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту: $S_{бок} = 2\pi RH$. Полная поверхность цилиндра вычисляется по формуле: $S_п = S_{бок} + 2S_{осн} = 2\pi R(H + R)$. Для объёма прямого кругового цилиндра верно: $V = \pi R^2 H$.
Конус	
 	*Конической поверхностью* называется поверхность, образуемая движением прямой, проходящей всё время через неподвижную точку вдоль данной линии. Эта линия называется *направляющей*, двигающаяся прямая, в каждом своём положении, – *образующей*, а неподвижная точка – *вершиной*. *Конусом* называется тело, ограниченное одной полостью конической поверхности с замкнутой направляющей и плоскостью, пересекающей все образующие этой полости и не проходящей через вершину. Часть этой плоскости, лежащая внутри конической поверхности, называется *основанием конуса*. *Высота конуса* – это перпендикуляр, опущенный из вершины конуса на плоскость основания. Часть конической поверхности, расположенная между вершиной и плоскостью основания, называется *боковой поверхностью конуса*. Кривая ABCDA – направляющая; прямая SA – образующая; точка S – вершина; отрезок SO – высота; фигура F – основание конуса.

	Конус называется *прямым круговым*, если его направляющая – окружность, а вершина ортогонально проектируется в его центр. В элементарной геометрии прямой круговой конус часто называют просто конусом. Прямой круговой конус можно получить вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов. При этом вращении другой катет опишет основание конуса, а гипотенуза – боковую поверхность. *Осью прямого кругового конуса* называется прямая, содержащая его высоту. Сечение конуса плоскостью, проходящей через его вершину, представляет собой равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны являются образующими конуса. В частности, равнобедренным треугольником является *осевое сечение конуса*. Это сечение, которое проходит через ось конуса. *Боковая поверхность прямого кругового конуса* равна произведению половины длины окружности основания на образующую: $S_{бок} = \pi R l$. *Полная поверхность прямого кругового конуса* вычисляется по формуле: $S_{п} = S_{бок} + S_{осн} = \pi R(l + R)$. Для объёма прямого кругового конуса верно: $V = (\pi R^2 H)/3$.
	Плоскость, параллельная основанию конуса и пересекающая конус, отсекает от него меньший конус, гомотетичный данному, причём центром гомотетии служит вершина конуса. Часть конуса, ограниченная его основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию, называется *усечённым конусом*. Отрезок AB – образующая усечённого конуса; отрезок O_1O_2 – высота усечённого конуса; отрезки AO_1 и BO_2– радиусы оснований. Для усечённого конуса верно: $l^2 = (R - r)^2 + H^2$; $S_{бок} = \pi(R + r)l$; $S_{п} = \pi(R^2 + r^2 + Rl + rl)$; $V = \pi H(R^2 + Rr + r^2)/3$.

Шар, части шара	
	*Шаром* называется тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не больше данного, от данной точки. Эта точка называется *центром шара* (на рисунке – это точка O), а данное расстояние (на рисунке – R) – *радиусом шара*. Шар, так же как цилиндр и конус, является телом вращения. Он получается при вращении полукруга вокруг его диаметра как оси. Граница шара называется *шаровой поверхностью* или *сферой*. Таким образом, точками сферы являются все точки шара, которые удалены от центра на расстояние, равное радиусу. Любой отрезок (OA), соединяющий центр шара с точкой шаровой поверхности, также называется *радиусом*. Отрезок, соединяющий две точки шаровой поверхности и проходящий через центр шара, называется *диаметром* (BC). Концы любого диаметра называются *диаметрально противоположными точками шара* (точки B и C). Сечение шара плоскостью, проходящей через его центр, называется *большим кругом* (фигура F), а сечение сферы – *большой окружностью* (линия *f* на рисунке). Любая плоскость, проходящая через центр шара, является его плоскостью симметрии. Центр шара является его центром симметрии. Площадь сферы и объём шара можно найти по формулам: $S = 4\pi R^2 = \pi D^2$; $V = (4\pi R^3)/3 = (\pi D^3)/6$, где R – радиус, D – диаметр сферы и шара.
	*Шаровой сегмент* – это часть шара, которая отсекается секущей плоскостью. Справедливы следующие формулы: $r^2 = H(2R - H)$; $S_{бок} = 2\pi RH = \pi(r^2 + H^2)$; $S_п = \pi(2RH + r^2) = \pi(2r^2 + H^2)$; $V = \pi H^2(R - H/3) = \pi H(H^2 + 3r^2)/6$, где R – радиус шара, *r* – радиус основания и H – высота шарового сегмента.
	*Шаровой сектор* – это геометрическое тело, получающееся при вращении кругового сектора около одного из его радиусов. Для площади поверхности и объёма шарового сектора верны формулы: $S = \pi R(2H + r)$; $V = (2\pi R^2 H)/3$,

	где R – радиус шара, r – радиус и H – высота шарового сегмента, содержащегося в секторе.
	*Шаровой слой* – часть шара, которая содержится между двумя параллельными плоскостями, пересекающими шар. *Основания шарового* слоя это сечения шара, образовавшиеся в результате пересечения шара двумя параллельными плоскостями. *Высота шарового слоя* это расстояние между основаниями слоя. O_1O_2 – высота шарового слоя; AO_1 и BO_2 – радиусы оснований шарового слоя; OC – радиус шара. Площадь боковой поверхности шарового слоя, *сферического пояса,* зависит только от высоты слоя и радиуса шара: $S_{бок} = 2\pi RH$. Объём шарового слоя: $V = \pi H(H^2 + 3r_1^2 + 3r_2^2)/6$, где r_1 и r_2 – радиусы оснований, H – высота шарового слоя.

Задачи для самостоятельного решения

1.Плоскость сечения параллельна оси цилиндра. Радиус цилиндра 10см, высота 25см. Расстояние между осью и плоскостью 6 см. Найти площадь сечения.

2.Плоскость сечения параллельна оси цилиндра и отсекает от окружности основания дугу $120°$. Высота цилиндра равна 5см. Площадь сечения равна 30см^2. Найдите расстояние между осью и плоскостью.

3. Образующая конуса равна 8 см, а угол при вершине осевого сечения $60°$. Найдите площадь осевого сечения.

4.Высота цилиндра 28 м, радиус оснований 7 м. Цилиндр пересечен плоскостью так, что в сечении получился квадрат. Найдите расстояние от сечения до оси.

5.В усеченном конусе проведено сечение AA_1BB_1, так что углы AOB и $A_1O_1B_1$ равны $60°$. Найдите длины оснований фигуры, полученной при сечении, если диаметр оснований конуса 8 см и 12 см.

Объем призмы и цилиндра

1. (Устно.) Объём куба 8 м3. Найти его поверхность.

2. Три латунных куба с рёбрами 3 см, 4 см и 5 см переплавлены в один куб. Какую длину имеет ребро этого куба?

3. 1) Металлический куб имеет внешнее ребро a =10,2 см и весит 514,15 г. Толщина стенок m = 0,1 см. Найти удельный вес металла, из которого сделан куб.

2) Из 10 кг свинца отливают куб. Найти ребро куба. (Удельный вес свинца 11,4; угар во внимание не принимается.)

3) Чугунный полый куб, наружное ребро которого 260 мм, имеет толщину стенок в 30 мм. Найти его вес (Удельный вес чугуна 7,4.)

4. Определить объём куба: 1) по его диагонали l, 2) по его поверхности S.

5. 1) Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объём увеличится на 98 см3. Определить ребро.

2) Если каждое ребро куба увеличить на 1 м, то объём увеличится в 125 раз. Определить ребро.
3) Поверхность (в кв. ед.) и объём куба (в куб. ед.) выражены одним числом. Найти ребро куба.
6. (Устно.) Как относятся объёмы двух кубов: данного и его модели, уменьшенной в масштабе 1:2; 1:3; 1:4 и т.д.; вообще 1:n?

Прямоугольный параллелепипед.

1. Кирпич (25 см x 12 см x 6,5 см) весит 3,51 кг. Найти его удельный вес.
2. Требуется установить резервуар для воды ёмкостью в 10 м3 на площади размером 2,5 м x 1,75 м, служащей для него дном. Найти высоту резервуара.
3. Прямоугольный золотой лист имеет размеры 4,7 см x 6,2 см и весит 6,3 г. Найти толщину листа. (Удельный вес золота 19,3.)
40. Плот сколочен из 16 балок прямоугольного сечения, из которых каждая имеет 3,6 м длины, 0,20 м ширины и 0,25 м толщины. Какой наибольший груз может он поднять, не затонув? (Удельный вес дерева равен 0,84.)
5. Измерения прямоугольного бруса: 3 см, 4 см и 5 см. Если увеличить каждое ребро на x сантиметров, то поверхность увеличится на 54 см^2. Как увеличится его объём?

Прямой параллелепипед.

1. В прямом параллелепипеде стороны основания a и b образуют угол в 30°; боковая поверхность равна S. Определить его объём.
19. 1) Основанием прямого параллелепипеда служит параллелограмм, у которого одна из диагоналей равна 17 см, а стороны равны 9 см и 10 см. Полная поверхность этого параллелепипеда содержит 334 см^2. Определить его объём.
2) В прямом параллелепипеде стороны основания равны 13 дм и 37 дм, а большая диагональ основания равна 40 дм. Боковое ребро относится к большей диагонали параллелепипеда, как 15:17. Определить объём этого параллелепипеда.
20. В прямом параллелепипеде стороны основания равны $2\sqrt{2}$ см и 5 см и образуют угол в 45°; меньшая диагональ параллелепипеда равна 7 см. Определить его объём.
3. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 8 см и 15 см и образуют угол в 60°; меньшая диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол в 30°. Определить объём этого параллелепипеда.
4. 1) Основанием прямого параллелепипеда служит ромб, площадь которого равна 1 м2. Площади диагональных сечений 3 м2 и 6 м2. Найти объём параллелепипеда.
2) Основанием прямого параллелепипеда служит ромб, площадь которого равна Q; площади диагональных сечений равны M и N. Определить объём параллелепипеда.
5. Основанием параллелепипеда служит ромб; диагональные сечения перпендикулярны к плоскости основания, и площади их содержат 100 см2 и 105 см2, а длина их линии пересечения равна 10 см. Определить объём и боковую поверхность этого параллелепипеда.

Правильная призма

1. По стороне основания a и боковому ребру b определить объём правильной призмы: 1) треугольной; 2) четырёхугольной; 3) шестиугольной.
2. Деревянная плитка в форме правильного восьмиугольника со стороной 3,2 см и толщиной в 0,7 см весит 17,3 г. Найти удельный вес дерева.
3.Сколько весит железная колонка, имеющая вид правильной двенадцатиугольной призмы, сторона основания которой a=12см и высота h = 78 см? (Удельный вес 7,4.)
4. Чугунная труба имеет квадратное сечение, её внешняя ширина 25 см, толщина стенок 3 см. Сколько весит погонный метр трубы?' (Удельный вес 7,3.)
5. 1) Диагональ правильной четырёхугольной призмы равна 3,5 м, а диагональ боковой грани 2,5 м. Определить объём.

2) Диагональ правильной четырёхугольной призмы равна 6 см, а боковая поверхность 32 см2. Определить объём.

Прямая призма.

1. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник, катеты которого относятся как 24:7; гипотенуза основания относится к высоте призмы, как 5:2; боковая поверхность содержит 140 м2. Определить объём призмы.
2. 1) В прямой треугольной призме стороны основания равны 4 см, 5 см и 7 см, а боковое ребро равно большей высоте основания. Определить объём призмы.
2) Высота прямой треугольной призмы равна 5 м, её объём равен 24 м^3, а площади боковых граней относятся как 17:17.: 16. Определить стороны основания.
3. Площадь основания прямой треугольной призмы равна 4 см^2, а площади боковых граней 9 см2, 10 см2 и 17 см2. Определить объём.
4. Железнодорожная насыпь дана в разрезе (черт. 28); размеры указаны в метрах. Найти, сколько кубических метров земли приходится на 1 км насыпи.
40. Сколько надо назначить рабочих, чтобы большими лопатами окончить в 6 час. рытьё канавы длиной в 25 м? Размеры (в метрах) поперечного сечения канавы указаны на чертеже 29. (Большой лопатой выкапывают 0,75 м^3 в час.)
5. Основанием прямой призмы служит трапеция ABCD, в которой параллельные стороны AD = 39 см и BC =22 см, а непараллельные AB = 26 см и CD = 25 см. Площадь сечения AA1C1C содержит 400см^2. Определить объём этой призмы.

Наклонный параллелепипед.

1. Основанием наклонного параллелепипеда служит параллелограмм ABCD, в котором AB = 3 дм, AD = 7 дм и BD = 6 дм. Диагональное сечение AA1C1C перпендикулярно к плоскости основания и равно 1 м2. Определить объём параллелепипеда.
2. 1) Основанием наклонного параллелепипеда служит квадрат, сторона которого равна 1 м. Одно из боковых рёбер образует с каждой прилежащей стороной основания угол в 60° и равно 2 м. Найти объём параллелепипеда.
2) Основанием наклонного параллелепипеда служит квадрат, и одно из боковых рёбер образует с прилежащими сторонами основания равные острые углы. Сторона основания a; боковое ребро b; расстояние между соответственными сторонами двух оснований c. Определить объём параллелепипеда (a=15; b=14; c=10).
3. Грани параллелепипеда—равные ромбы со стороной a и острым углом в 60°. Определить объём параллелепипеда.
4. Основанием наклонного параллелепипеда служит прямоугольник со сторонами a и b; боковое ребро c образует со сторонами основания углы в 60°. Определить объём параллелепипеда, боковую поверхность и угол наклона бокового ребра к плоскости основания.
5. Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб ABCD со стороной a и острым углом в 60°. Ребро AA1 также равно a и образует с рёбрами AB и AD углы в 45°. Определить объём этого параллелепипеда.

Наклонная призма.

1. Основанием призмы служит треугольник, у которого одна сторона равна 2 см, а две другие по 8 см ; боковое ребро равно 4 см и составляет с плоскостью основания угол в 45°. Определить ребро равновеликого куба.
2. 1) Основанием призмы служит треугольник со сторонами 3 см, 5 см и 7 см. Боковое ребро длиной 8 см составляет с плоскостью основания угол в 60°. Определить объём призмы.
2) В наклонной треугольной призме стороны основания равны 5 м, 6 м и 9 м; боковое ребро равно 10 м и составляет с плоскостью основания угол в 45°. Определить объём призмы.

3. Основанием призмы служит правильный треугольник ABC со стороной a; вершина A1 проектируется в центр нижнего основания, и ребро AA1 составляет со стороной основания угол в 45°. Определить объём и боковую поверхность призмы.
4. Основанием наклонней призмы служит равносторонний треугольник со стороной a; одна из боковых граней перпендикулярна к плоскости основания и представляет собой ромб, у которого меньшая диагональ равна c. Определить объём призмы.
5. 1) Боковые рёбра наклонней треугольной призмы равны 15 м, а расстояние между ними 26 м, 25 м и 17 м. Определить её объём.
2) В данной треугольной призме расстояния между боковыми рёбрами относятся как 9:10:17; боковое ребро равно 1 м; боковая поверхность равна 6 м2. Определить объём этой призмы.

Цилиндр.

1. 25 м медной проволоки весят 100,7 г. Найти диаметр проволоки. (Удельный вес меди 8,9.)
2. Погонный метр пенькового каната диаметром в 36 мм весит 0,96 кг. Найти его удельный вес.
3. Столбик ртути в термометре длиной 15,6 см весит 5,2 г. (Удельный вес ртути 13,6.) Найти площадь поперечного сечения столбика.
4. В мензурке (цилиндрический сосуд с делениями на кубические сантиметры) расстояние между двумя смежными делениями 1,8 см. Найти внутренний диаметр мензурки.
5. Насос, подающий воду в паровой котёл, имеет два водяных цилиндра. Размеры каждого цилиндра: ход поршня 150 мм, диаметр 80 мм. Определить часовую производительность насоса, если известно, что каждый поршень делает 50 рабочих ходов в 1 минуту.

Объем пирамиды и конуса

Правильная пирамида.

1. По стороне основания a и боковому ребру b определить объём правильной пирамиды:
1) треугольной; 2) четырёхугольной; 3) шестиугольной.
2. (У) В правильной четырёхугольной пирамиде высота 3 м, боковое ребро 5 м. Найти объём.
3. Объём правильной шестиугольной пирамиды 6 см^3. Сторона основания 1 см. Найти боков ребро.
4. 1) Апофема правильной треугольной пирамиды равна k, а высота h. Найти объём.
2) Площадь основания правильной четырёхугольной пирамиды $S_{осн} = 12$, боковая поверхность
$S_{бок} = 24$. Определить объём.
5. 1) (У) Боковые рёбра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно b. Найти объём пирамиды.
2) Определить объём правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания равна a, а боковые рёбра взаимно перпендикулярны.

Неправильная пирамида.

1. Основанием пирамиды служит прямоугольник со сторонами 9м и 12м; каждое из боковых рёбер равно 12,5 м. Найти объём пирамиды.
2. Основанием пирамиды служит прямоугольник со сторонами 6 см и 15 см, высота проходит через точку пересечения диагоналей основания, и боковая поверхность равна 126 см^2. Определить объём этой пирамиды.

3. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого равные стороны по 6см, а третья сторона 8 см. Боковые рёбра равны между собой по 9 см. Определить объём этой пирамиды.
4. Основанием пирамиды служит прямоугольник, у которого угол между диагоналями равен 60°, а площадь равна Q; боковые рёбра образуют с плоскостью основания углы в 45°. Определить объём этой пирамиды.
5. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 39 см, 17 см и 28 см; боковые рёбра равны по 22,9 см. Определить объём этой пирамиды.

Конус.

1. (У) Высота конуса 3, образующая 5. Найти объём.
2. 122-миллиметровая бомба даёт при взрыве воронку диаметром в 4 м и глубиной 1,5 м. Какое количество земли (по весу) выбрасывает эта бомба? 1 $м^3$ земли весит 1650 кг.
3. Куча щебня имеет коническую форму, радиус основания которой 2 м и образующая 3,5 м. Сколько надо возов, чтобы перевезти щебень, уложенный в десяти таких кучах? 1 $м^3$ щебня весит 3 т. На один воз грузят 0,5 т.
4. Стог сена имеет форму цилиндра с коническим верхом. Радиус его основания 2,5 м, высота 4 м, причём цилиндрическая часть стога высотой 2,2 м. Удельный вес сена 0,03. Определить вес стога.
5. Жидкость, налитая в конический сосуд, имеющий 0,18 м высоты и 0,24 м в диаметре основания, переливается в цилиндрический сосуд, диаметр основания которого 0,10 м. Как высоко будет стоять уровень жидкости в сосуде?

Конус как тело вращения.

1. Равносторонний треугольник вращается вокруг своей стороны a. Найти поверхность и объём тела вращения.
2. Основание треугольника b , высота его h. Найти объём тела, полученного при вращении его вокруг основания.
3. Прямоугольный треугольник с катетами a и b вращается около гипотенузы. Определить объём и поверхность полученного тела.
4. 1) Определить объём и поверхность тела, образуемого вращением равнобедренного треугольника вокруг боковой стороны, если основание равно 30 см, а боковая сторона 25 см.

   2) Равнобедренный треугольник с углом при вершине в 120° и боковой стороной а вращается вокруг боковой стороны. Определить объём и поверхность тела вращения.
5. 1) Треугольник со сторонами в 10 см, 17 см и 21 см вращается вокруг большей стороны. Определить объём и поверхность полученного тела.

   2) Такой же вопрос для треугольника со сторонами:.6 см, 25 см и 29 см, вращаемого вокруг меньшей стороны.

Тема 8

Производная и её применение

Краткие теоретические сведения:

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

Геометрической прогрессией называется числовая последовательность задаваемая двумя параметрами b, q (q ≠ 0) и законом $b_1 = b$, $b_n = b_{n-1} \cdot q$, $n = 2,3,...$

Число q называют знаменателем данной геометрической прогрессии.

- Если q > 0 все члены геометрической прогрессии имеют один и тот же знак, совпадающий со знаком числа b.
- Если q < 0 знаки членов геометрической прогрессии чередуются.
- В случае -1 < q < 1 прогрессию называют бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

Любой член геометрической прогрессии может быть вычислен по формуле:

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$;

Формула знаменателя геометрической прогрессии:

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Формула суммы n-первых членов геометрической прогрессии

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q},$$

$$S_n = \frac{b_1 - b_n * q}{1 - q},$$

где, q ≠ 1

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия — это прогрессия, у которой |q| < 1. Для неё определяется понятие суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии как число, к которому неограниченно приближается сумма n первых членов рассматриваемой прогрессии при неограниченном возрастании числа n.

Формула суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$

где, q ≠ 1

Пример 1.

Задана геометрическая прогрессия 2,6,18,... Найти десятый член прогрессии и сумму её двенадцати первых членов.

$2, 6, 18, \ldots \quad b_{10} - ? \quad S_{12} - ?$

$$b_1 = 2 \quad q = \frac{6}{2} = 3 \qquad b_{10} = 2 \cdot 3^{10-1} = 39366 \quad S_{12} = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = \frac{2 \cdot (3^{12} - 1)}{3 - 1} = 531440$$

Ответ: $b_{10} = 39366$; $S_{12} = 531440$

Производная функции.

Производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 - это предел отношения приращения функции Δy в этой точке к соответствующему приращению аргумента Δx при $\Delta x \to 0$.

Геометрически производная представляет угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в соответствующей точке $M_1(x_0, y_0)$ $tg\alpha = y' = f'(x_0)$

Физический смысл производной. y' - это скорость изменения функции $y = f(x)$ относительно её аргумента x. Производная y' характеризует быстроту изменения функции, т.е. скорость роста. Отрицательная скорость роста означает падение – уменьшение y при увеличении x, т.е. скорость убывания функции.

Таблица производных.

1	$(c)'=0$, где С – постоянное число	10	$(e^x)'=e^x$
2	$(u\pm v)'=u'\pm v'$	11	$(\sin x)'=\cos x$
3	$(uv)'=u'v+v'u$	12	$(\cos x)'=-\sin x$
4	$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$	13	$(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$
5	$(cu)'=cu'$	14	$(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$
6	$(x^n)'=nx^{n-1}$	15	$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
7	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	16	$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
8	$(a^x)'=a^x\ln a$	17	$(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$
9	$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$	18	$(arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}$

Геометрический смысл производной.

Производная функции $y=f(x)$ *в точке* x_0 *равна тангенсу угла наклона касательной, проведённой в точке* x_0 *или угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке.* $y'(x_0)=tg\,\alpha=k$ (1)

Уравнение касательной к кривой $y=f(x)$ *в точке* $(x_0;y_0)$ *имеет вид*

$$y-y_0=y'_{x_0}(x-x_0)\quad(2)$$

Уравнение нормали к кривой $y=f(x)$ *в точке* $(x_0;y_0)$ *имеет вид*

$$y-y_0=\frac{-1}{y'_{x_0}}(x-x_0)\quad(3)$$

Решение задач

П р и м е р 1. Вычислите угловые коэффициенты касательных к параболе $y=x^2$ в точках $(1;1),(2;4)$.

Решение. Из геометрического смысла производной (формула 1) угловой коэффициент касательной $k=y'(x_0)$.

Найдём производную функции: $y'=2x$.

1. Найдём значение производной в точке $x_0=1$.

$y'(1)=2\cdot 1=2$. Следовательно, $k_1=2$.

2. Найдём значение производной в точке $x_0=2$.

$y'(1)=2\cdot 2=4$. Следовательно, $k_2=4$.

П р и м е р 2. У параболы $y=\frac{4x-x^2}{4}$ проведены касательные в точках $(0;0),(2;1)$. Найдите углы наклона касательных к оси Ox.

Решение. По формуле (1) $y'(x_0)=tg\,\alpha$.

Найдём y'. $y'=\left(\frac{1}{4}(4x-x^2)\right)'=\frac{1}{4}(4-2x)=1-\frac{1}{2}x$.

1. Вычислим значение производной в точке $(0;0)$: $y'(0)=1-\frac{1}{2}\cdot 0=1$.

Следовательно, $tg\,\alpha=1$ и $\alpha=45°$.

2. Аналогично в точке $(2;1)$ $y'(2)=1-\frac{1}{2}\cdot 2=0$.

Следовательно, $tg\,\alpha=0$ и $\alpha=0°$.

П р и м е р 3. В какой точке касательная к кривой $y=\ln x$ наклонена к оси Ох под углом $\frac{\pi}{4}$?

Решение. По формуле (1) $y'(x_0)=tg\,\alpha$.

$y'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$; $tg\,\alpha=tg\,\frac{\pi}{4}=1$. Следовательно, $\frac{1}{x}=1$ и $x=1$.

Подставив $x=1$ в функцию $y=\ln x$, получим $y=\ln 1=0$. Получили точку $(1;0)$.

П р и м е р 4. Составить уравнение касательной и нормали к параболе $y=x^2-3x-1$ в точке $(3;4)$.

Решение. Уравнение касательной к кривой имеет вид $y-y_0=y'_{x_0}(x-x_0)$.

Из условия задачи $x_0=3, y_0=4$. Найдём производную y'.

$y'=(x^2-3x-1)'=2x-3$; $y'(x_0)=y'(3)=2\cdot 3-3=3$.

Подставив все значения в уравнение (2), получим уравнение касательной $y-4=3\cdot(x-3)$ или $y=3x-5$.

Составим уравнение нормали, воспользовавшись формулой (3):

$y-4=\frac{-1}{3}\cdot(x-3)$ или $y=\frac{-1}{3}x+5$

<u>Исследование функции и построение графика.</u>

Алгоритм исследования функции $y=f(x)$ и построения ее графика таков:

1. Находим <u>область определения</u> (D(f)) функции $y=f(x)$.

2. Если область определения функции симметрична относительно нуля (то есть для любого значения x из D(f) значение $-x$ также принадлежит области определения, то проверяем функцию на четность.

Если $f(-x)=f(x)$, то функция четная. (Примером четной функции является функция $y=x^2$)

Важно, что график четной функции симметричен относительно оси OY.

Если $f(-x)=-f(x)$, то функция нечетная. (Примером нечетной функции является функция $y=x^3$)

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Если функция является четной или нечетной, то мы можем построить часть ее графика для $x\geqslant 0$, а затем соответствующим образом отразить ее.

3. Находим точки пересечения графика с осями координат.

Находим нули функции - это точки пересечения графика функции $y=f(x)$ с осью абсцисс (OX).

Для этого мы решаем уравнение $f(x)=0$.
Корни этого уравнения являются *абсциссами точек пересечения графика функции с осью OX.*

Находим точку пересечения графика функции $y=f(x)$ с осью ординат (OY). Для этого ищем значение функции при $x=0$.
4. Находим промежутки знакопостоянства функции, то есть промежутки, на которых функция $y=f(x)$ сохраняет знак.

Чтобы найти промежутки знакопостоянства функции $y=f(x)$, нам нужно решить неравенства $f(x)>0$ и $f(x)<0$.
5. Находим асимптоты графика функции.
6. Если функция периодическая, то находим период функции.
7. Исследуем функцию с помощью производной: находим промежутки возрастания и убывания функции, а также точки максимума и минимума.
Для этого мы следуем привычному алгоритму.

а) Находим производную $f'(x)$

б) Приравниваем производную к нулю и находим корни уравнения $f'(x)=0$ - это стационарные точки.
в) Находим промежутки знакопостоянства производной. Промежутки, на которых производная положительна, являются промежутками возрастания функции.
Промежутки, на которых производная отрицательна, являются промежутками убывания функции.
Точки, в которых производная меняет знак с плюса на минус, являются точками максимума.
Точки, в которых производная меняет знак с минуса на плюс, являются точками минимума.
8. И последний пункт - точки перегибы и промежутки выпуклости и вогнутости.

Применение производной для решения задач.

Нахождение наибольшего и наименьшего значений монотонной функции f(x) на отрезке (а;в) достигается на концах отрезка. Если же заданная функция не является монотонной, но известно, что она является непрерывной, то для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке применяется правило:

1. Найти критические точки функции.
2. Найти значения функции в критических точках, принадлежащих отрезку, и на концах отрезка. Наибольшее и наименьшее значения из этих чисел и будут соответственно наибольшим и наименьшим значениями функции на отрезке.

3 этапа математического моделирования, применяемые при решении задач:

- 1 этап. Составление математической модели.
- 2 этап. Работа с составленной моделью.
- 3 этап. Ответ на вопрос задачи.

Дифференциал функции.

Дифференциал функции $y = f(x)$ *в точке* x_0 - это главная часть приращения функции, линейная относительно приращения аргумента Δx. Обозначается $dy = y'\Delta x$.
Дифференциал независимой переменной x равен её приращению: $dx = \Delta x$.

Дифференциал функции $dy = y'\Delta x$ или $dy = f'(x_0)dx$ равен её производной, умноженной на дифференциал аргумента.

Дифференциал функции dy имеет геометрический смысл: это приращение ординаты касательной к графику функции в точке x_0.

Пример.

Найти дифференциал функции $y = 3x + x^2$ в точке $x = 2$.

Решение: $dy = y'dx$.

Вычислим производную функции: $y' = 3 + 2x$. Тогда $y'(2) = 3 + 2 \cdot 2 = 7$. Значит, $dy = 7dx$.

Ответ: $dy_{x=2} = 7dx$.

Пример.

Найти дифференциал функции $y = x^3 - 3^x$.

Решение: $dy = y'dx = \left(x^3 - 3^x\right)' dx = \left(3x^2 - 3^x \ln 3\right)dx$.

Ответ: $dy_{x=2} = 7dx$.

Приближённые вычисления с помощью дифференциала.

Основаны на приближённой замене приращения функции Δy в данной точке на её дифференциал dy.

При $\Delta x \to 0$ абсолютная погрешность от такой замены является бесконечно малой более высокого прядка по сравнению с Δx:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x)$$

$$dy = f'(x_0)dx$$

Объединяя эти две формулы, получим:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + dy$$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Это основная формула в приближённых вычислениях.

Задания для самостоятельной работы:

Найдите производную функции

1. $y = x^3 + \cos 3x$.
2. $y = 2^x + \cos x$.
3. $y = tg\, x + x^2$.
4. $y = 4^x - 2\cos x$.
5. $y = 3^x - 3x^4$.
6. $y = (3x - 2)^6$.
7. $y = e^{-x} + x^2$.
8. $y = 5^{-x} - 3tg2x$.
9. $y = \sin 4x - x^4$.
10. $y = (4x - 5) \cdot \cos x$.
11. $y = \sin(4x - 5) - x^4$.
12. $y = (3x + 2) \cdot ctgx$.

Найдите производную функции в заданной точке

1. $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + x - 1$ в точке $x_0 = 1$.
2. $y(x) = \sqrt[3]{x^4}$ в точке $x_0 = 8$.
3. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 2$ в точке $x_0 = 1$.
4. $y(x) = 2 - \ln 5x$ в точке $x_0 = \frac{1}{5}$.
5. $y(x) = x^3 - \frac{1}{x}$ в точке $x_0 = 2$
6. $y(x) = \ln(x - 3)$ в точке $x_0 = 2$
7. $f(x) = (10x - 4)^8$ в точке $x_0 = \frac{1}{2}$.
8. $y(x) = 3x\ln 4x$ в точке $x_0 = \frac{1}{4}$.
9. $y(x) = \ln(5 - 2x)$ в точке $x_0 = 2$.
10. $f(x) = \ln(5x^3 + 3x - 7)$ в точке $x_0 = 1$.
11. $y(x) = \frac{e^{2x}}{x}$ в точке $x_0 = \frac{1}{2}$.
12. $f(x) = x^6 - \frac{1}{2}x^2 - 2$ в точке $x_0 = -1$.

Выполнить действия:

1. Представьте число 52 в виде суммы трех положительных чисел так, чтобы сумма квадратов всех слагаемых была наименьшей, а отношение первого числа ко второму было равно 1:3.

2. Число 42 представьте в виде суммы трех положительных слагаемых так. Чтобы отношение первого числа ко второму было равно 3:4, а произведение всех трех чисел было наибольшим.

3. Произведение трех последовательных членов геометрической прогрессии с отрицательным знаменателем равно 343. Найдите наибольшую сумму этих трех членов среди всех прогрессий, обладающих указанными свойствами.

4. Участок в форме прямоугольника площадью 800 огорожен с трех сторон забором. Найдите наименьшую длину забора.

5. Периметр параллелограмма с острым углом 30˚ равен 4. Найти максимально возможное значение площади параллелограмма.

6. В пирамиде SABC ребра SA и BC образуют угол 60˚, SA=4, BC=6√3. Найдите наименьшую площадь сечения пирамиды плоскостью, параллельной SA и BC.

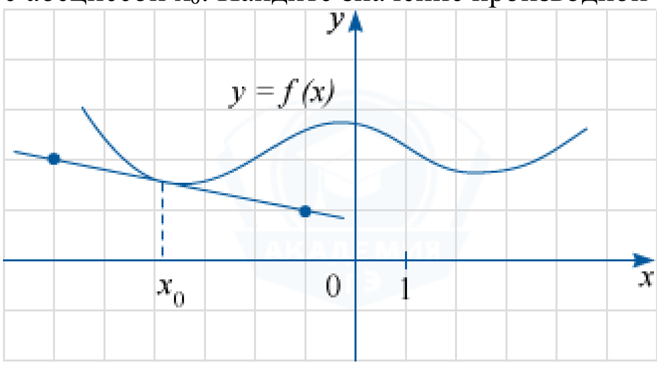
7. Определите наименьшую суммарную длину всех ребер прямоугольного параллелепипеда, полная поверхность которого равна 600 см2, если основание его является квадратом.

8. Дана прямоугольная система координат xOy. Какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, на гипотенузе которого лежит точка M (0;1), а катеты лежат на прямых x = -2 и y = 0?

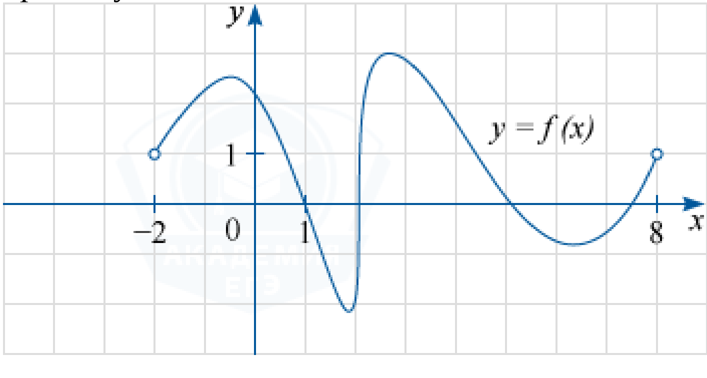
9. Прямая $y = 3x+2$ является касательной к графику функции $y = -12x^2+bx-10$. Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания меньше нуля.

10. Прямая $y=-3x+4$ параллельна касательной к графику функции $y = -x^2+5x-7$. Найдите абсциссу точки касания.

11. На рисунке изображены график функции y=f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции f(x) в точке x_0.



12. На рисунке изображён график функции y = f(x), определённой на интервале (−2;8). Определите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой y = 6.



Тема 9. Интеграл и его применение

Краткие теоретические сведения.

Первообразная. Правила нахождения первообразных.

Известно, что каждому математическому действию соответствует обратное ему действие. Для дифференцирования существует обратное действие – интегрирование: нахождение функции (восстановление функции) по заданной ее производной или дифференциалу. Функцию, восстанавливаемую по заданной ее производной или дифференциалу, называют первообразной.

Определение.

Дифференцируемая функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на заданном промежутке, если для всех x из этого промежутка справедливо равенство $F'(x)=f(x)$.

Пример.

1) $(x^3)'=3x^2$.

Значит, функция $F(x)=x^3$ – первообразная для функции $f(x)=3x^2$.

2) $(sin2x)'=2cos2x$.

Значит, первообразной для функции $f(x)=2cos2x$ является функция $F(x)=sin2x$.

Дифференцирование функции – однозначная операция, т. е. если функция имеет производную, то только одну! Интегрирование, как и всякое обратное действие, неоднозначно! Смотрите сами: в первом примере функция $F(x)=x^3$ являлась первообразной для функции $f(x)=3x^2$ потому что $F'(x)=(x^3)' = 3x^2=f(x)$.

Но ведь и $(x^3+4)'=3x^2$, значит и функция $F(x)=x^3+4$ будет первообразной для функции $f(x)=3x^2$, да и любая другая функция вида $F(x)=x^3+C$ будет служить первообразной для $f(x)=3x^2$, так как $F'(x)=(x^3+C)'=3x^2=f(x)$.

Если $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на некотором промежутке, то множество всех первообразных этой функции имеет вид $F(x)+C$, где C - любое действительное число.

Совокупность всех первообразных $F(x)+C$ функции $f(x)$ на рассматриваемом промежутке называется неопределенным интегралом и обозначается символом $\int f(x)dx$, где $f(x)$ - подынтегральная функция, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, x - переменная интегрирования.

Неопределённый интеграл.

Неопределённый интеграл функции $y=f(x)$ - это совокупность всех первообразных функций $F(x)+C$ для функции $f(x)$. Обозначается символом

$\int f(x)dx = F(x)+C$, где $\int$ - знак интеграла, $f(x)$ - подынтегральная функция, $f(x)dx$ - подынтегральное выражение, C – постоянная интегрирования, способная принимать любое значение, x - переменная интегрирования.

Интегрирование – это отыскание первообразной по её производной. Это действие, обратное дифференцированию.

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ.

1	$\int 0dx = C$	6	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}+C$	11	$\int \cos x dx = \sin x + C$
2	$\int dx = x + C$	7	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C$	12	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$
3	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C$,	8	$\int e^x dx = e^x + C$	13	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

	$n \neq -1$				
4	$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$	9	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	14	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
5	$\int \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$	10	$\int \cos x dx = \sin x + C$	15	$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$

Геометрический смысл неопределённого интеграла: это семейство кривых, зависящих от одного параметра *C,* которые получаются путём параллельного сдвига вдоль оси Oy .

<u>Определённый интеграл</u>.

Определённый интеграл – это общий предел всех интегральных сумм функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Имеет место формула Ньютона-Лейбница: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Геометрический смысл определённого интеграла: он численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$; $x = b$; $y = 0$ и частью графика функции $y = f(x)$, взятой со знаком плюс, если функция положительна, и со знаком минус, если функция отрицательна.

<u>Применение определённого интеграла в геометрии</u>.

Давайте начнём с известной нам формулы площади круга.

Рассмотрим окружность с центром в начале координат. Каким уравнением задаётся эта окружность? $x^2 + y^2 = R^2$.

Тогда её часть расположенная выше оси абсцисс есть график функции $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, где $-R \le x \le R$.

Используя геометрический смысл определённого интеграла площадь круга радиуса R равна

$$S = 2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2 - x^2}dx$$

Вычислим этот интеграл, пользуясь заменой переменной:

$$x = R\sin\alpha, -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$$

При возрастании переменной что будет происходить с переменной x? возрастает от –R до R.

$dx = R\cos\alpha d\alpha$ и $\cos\alpha \ge 0$

Тогда получим

$$S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{R^2 - R^2\sin^2\alpha}R\cos\alpha d\alpha$$

Как упростить подынтегральное выражение? Вынести R^2 за знак интеграла и воспользоваться основным тригонометрическим тождеством

$$S = 2R^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\alpha d\alpha$$

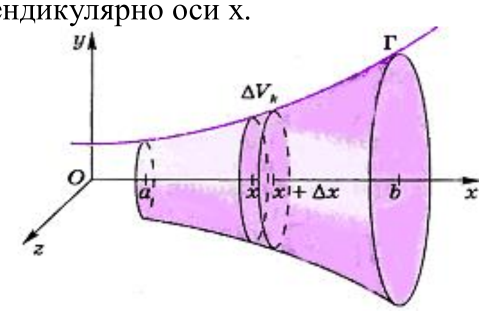
$\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$, тогда $S = 2R^2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}d\alpha = 2R^2\left(\dfrac{1}{2}\alpha + \dfrac{1}{4}\sin 2\alpha\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi R^2$

Таким образом, мы получили известную нам формулу для вычисления площади круга $S = \pi R^2$.

<u>Объём тела вращения.</u>

Пусть Г график непрерывной положительной функции y=f(x) в прямоугольной системе координат xOy.

Необходимо вычислить объём тела вращения, ограниченного поверхностью вращения кривой Г вокруг оси x и плоскостями, проходящими через точки x = a, x = b перпендикулярно оси x.



Если тело разбито на части как можно найти его объём?
Объём тела равен сумме объёмов тел, его составляющих.
Поэтому можно разбить наше тело на части.
Разобьем отрезок [a;b] на части точками $a<x_0<x_1<.....<x_n<b$. Рассмотрим цилиндр с высотой $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ и радиуса основания *yk = f(xk).*
Как можно вычислить объём цилиндра? $V = \pi R^2 h$
Тогда объем нашего цилиндра будет равен $\Delta V_k \approx \pi y_k^2 \Delta x_k = \pi(f(x))^2\Delta x_k$
Тогда объём всего тела может быть записан при помощи приближённого равенства $V \approx \pi\sum\limits_{k=0}^{n-1}(f(x_k))^2\Delta x_k$.
Чтобы получить точное равенство надо взять предел
$V = \lim\limits_{\max \Delta x_k \to 0}\pi\sum\limits_{k=0}^{n-1}(f(x_k))^2\Delta x_k$
По определению определённого интеграла
$V = \pi\int\limits_a^b(f(x))^2dx$
мы получили формулу для вычисления объёма тела вращения.

<u>Применение определённого интеграла в физике</u>.
<u>1. Работа</u>.

Пусть к движущейся по прямой точке приложена направленная вдоль этой прямой переменная сила F=f(x), где f(x) есть непрерывная функция от x – координаты движущейся точки. Работа силы F при передвижении точки от a до b равна

$$W=\lim_{\max \Delta x_j\to 0}\sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)\Delta x_j=\int_a^b f(x)dx$$

где $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$, $?x_j=x_{j+1}-x_j$

в силу непрерывности функции f(x) произведение $f(x_j)\Delta x_j$ близко к истинной работе на отрезке $[x_j;\ x_{j+1}]$, а сумма таких произведений близка к истинной работе на отрезке [a; b], и притом тем ближе, чем меньше наибольший из всех $?x_j$.

№ 4.

К движущейся по прямой точке приложена направленная вдоль этой прямой сила F=2x-1, где x – координата движущейся точки. Вычислите работу силы F по перемещению точки от 0 до 3. (слайд 17)

Решение:

$$W=\int_a^b f(x)dx$$

$$W=\int_0^3 (2x-1)dx=(x^2-x)\Big|_0^3=6$$

2. Масса стержня переменной плотности

Будем считать, что отрезок [a; b] оси Ox имеет массу с переменной линейной плотностью $\rho(x)\geq 0$, где $\rho(x)$ - непрерывная на отрезке [a; b] функция. Общая масса этого отрезка

$$M=\lim_{\max \Delta x_j\to 0}\sum_{j=0}^{n-1} \rho(x_j)\Delta x_j=\int_a^b \rho(x)dx$$

, где $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$, $?x_j=x_{j+1}-x_j$

№ 5. Вычислить массу стержня на отрезке от 0 до 2, если его плотность задаётся функцией $\rho(x)=x+1$

Решение:

$$M=\int_a^b \rho(x)dx$$

$$M=\int_0^2 (x+1)dx=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^2=4$$

Задания для самостоятельного решения:

Вычислить интеграл:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos 2x dx$, б) $\int_0^4 12\sqrt{x}dx$, в) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin\frac{x}{2}dx$, г) $\int_{\frac{1}{3}}^{1}(3x+1)^2dx$, д) $\int_0^1\left(3x^2+4x\right)dx.$,

е) $\int_{-2}^{0}(0{,}5x+1)^5dx$, ж) $\int_{\frac{1}{3}}^{1}(3x+1)^2dx$, з) $\int_{-2}^{0}(0{,}5x+1)^5dx$, и) $\int_{-1}^{0}(2x+1)^4dx$, к) $\int_1^9\frac{2}{\sqrt{x}}dx$

Самостоятельная работа по теме: «Интеграл». Вариант 1. №1. Вычислите: 1) $\int\left(9x^2-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$ 2) $\int\frac{8dx}{4x-1}$ 3) $\int\frac{4x^2-9}{2x+3}dx$ №2. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью Ox, прямыми $x=0$ и $x=1$, и графиком функции $y=(x+1)^4$. №3. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью Ox, прямыми $x=\frac{\pi}{4}$ и $x=\pi$, и графиком функции $y=\sin x$.	*Самостоятельная работа по теме: «Интеграл». Вариант 2.* №1. Вычислите: 1) $\int\left(15x^4+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$ 2) $\int\frac{6dx}{\sqrt{3x+1}}$ 3) $\int\frac{x^3+8}{x+2}dx$ №2. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью Ox, прямыми $x=-1$ и $x=1$, и графиком функции $y=-x^3+1$. №3. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью Ox, прямыми $x=-\frac{\pi}{6}$ и $x=\frac{\pi}{2}$, и графиком функции $y=\cos x$.
Самостоятельная работа по теме: «Интеграл». Вариант 3. №1. Вычислите: 1) $\int\left(8x^3+3\sqrt{x}-\frac{2}{\sin^2 x}\right)dx$ 2) $\int\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)dx$ 3) $\int\frac{9x^2-25}{3x-5}dx$ №2. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью Ox, прямыми $x=0$ и $x=1$, и графиком функции $y=(x+1)^3$. №3. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью Ox, прямыми $x=1$ и $x=e$, и графиком функции $y=\frac{3}{x}$.	*Самостоятельная работа по теме: «Интеграл». Вариант 4.* №1. Вычислите: 1) $\int\left(12x^5-\frac{2}{x^3}+\frac{3}{\cos^2 x}\right)dx$ 2) $\int\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)dx$ 3) $\int\frac{x^3-27}{x-3}dx$ №2. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью Ox, прямыми $x=-1$ и $x=1$, и графиком функции $y=-x^4+4$. №3. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью Ox, прямыми $x=1$ и $x=4$, и графиком функции $y=3\sqrt{x}-2$.

Тема 10.
Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей

Краткие теоретические сведения

Вероятность события

<u>Статистическое определение вероятности</u>.

Обозначения. Вероятность некоторого события A обозначается большой латинской буквой P, а само событие берётся в скобки, выступая в роли своеобразного аргумента. Например:

$P(A_O)$ – вероятность того, что в результате броска монеты выпадет «орёл»;

$P(B_5)$ – вероятность того, что в результате броска игральной кости выпадет 5 очков;

$P(C_T)$ – вероятность того, что из колоды будет извлечена карта трефовой масти.

Для обозначения вероятности используется маленькая буква Р

$p_O = \frac{1}{2}$ – вероятность того, что в результате броска монеты выпадет «орёл»;

$p_5 = \frac{1}{6}$ – вероятность того, что в результате броска игральной кости выпадет 5 очков;

$p_T = \frac{1}{4}$ – вероятность того, что из колоды будет извлечена карта трефовой масти.

<u>Классическое определение вероятности:</u>

Вероятностью наступления события A в некотором испытании называют отношение $P(A) = \frac{m}{n}$, где:

n – общее число всех <u>равновозможных</u>, <u>элементарных</u> исходов этого испытания, которые образуют <u>полную группу событий</u>;

m – количество <u>элементарных</u> исходов, **благоприятствующих** событию A.

При броске монеты может выпасть либо орёл, либо решка – данные события образуют <u>полную группу</u>, таким образом, общее число исходов $n = 2$; при этом, каждый из них <u>элементарен</u> и <u>равновозможен</u>.

Событию A_O благоприятствует $m = 1$ исход (выпадение орла). По классическому определению вероятностей: $P(A_O) = \frac{m}{n} = \frac{1}{2}$.

Аналогично – в результате броска кубика может появиться $n = 6$ элементарных равновозможных исходов, образующих полную группу, а событию B_5 благоприятствует единственный $m = 1$ исход (выпадение пятерки) $P(B_5) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6}$.

<u>Зависимые и независимые события</u>

События являются **независимыми**, если вероятность наступления **любого из них** <u>не зависит</u> от появления/непоявления остальных событий рассматриваемого множества (во всех возможных комбинациях).

Теорема умножения вероятностей независимых событий: вероятность совместного появления независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий:

$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

Вернёмся к простейшему примеру 1-го урока, в котором подбрасываются две монеты и следующим событиям:

A_1 – на 1-й монете выпадет орёл;

A_2 – на 2-й монете выпадет орёл.

Найдём вероятность события A_1A_2 (на 1-й монете появится орёл **и** на 2-й монете появится орёл – вспоминаем, как читается **произведение событий**!). Вероятность выпадения орла на одной монете никак не зависит от результата броска другой монеты, следовательно, события A_1 и A_2 независимы. По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$$P(A_1A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Аналогично:

$P(\overline{A}_1\overline{A}_2) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ – вероятность того, что на 1-й монете выпадет решка **и** на 2-й решка;

$P(A_1\overline{A}_2) = P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ – вероятность того, что на 1-й монете появится орёл **и** на 2-й решка;

$P(\overline{A}_1A_2) = P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ – вероятность того, что на 1-й монете появится решка **и** на 2-й орёл.

События $A_1A_2,\ \overline{A}_1\overline{A}_2,\ A_1\overline{A}_2,\ \overline{A}_1A_2$ образуют **полную группу** и сумма их вероятностей равна единице: $P(A_1A_2) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2) + P(A_1\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1A_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$.

Теорема умножения очевидным образом распространяется и на большее количество независимых событий, так, например, если события A, B, C независимы, то вероятность их совместного наступления равна: $P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.

Задача

В каждом из трех ящиков имеется по 10 деталей. В первом ящике 8 стандартных деталей, во втором – 7, в третьем – 9. Из каждого ящика наудачу извлекают по одной детали. Найти вероятность того, что все детали окажутся стандартными.

Решение: вероятность извлечения стандартной или нестандартной детали из любого ящика не зависит от того, какие детали будут извлечены из других ящиков, поэтому в задаче речь идёт о независимых событиях. Рассмотрим следующие независимые события:

S_1 – из 1-го ящика извлечена стандартная деталь;

S_2 – из 2-го ящика извлечена стандартная деталь;

S_3 – из 3-го ящика извлечена стандартная деталь.

По классическому определению:

$P(S_1) = \frac{8}{10} = 0{,}8; \quad P(S_2) = \frac{7}{10} = 0{,}7; \quad P(S_3) = \frac{9}{10} = 0{,}9$ – соответствующие вероятности.

Интересующее нас событие (из 1-го ящика будет извлечена стандартная деталь **и** из 2-го стандартная **и** из 3-го стандартная) выражается произведением $S_1S_2S_3$.

По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$P(S_1S_2S_3) = P(S_1) \cdot P(S_2) \cdot P(S_3) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}504$ – вероятность того, что из трёх ящиков будет извлечено по одной стандартной детали.

Ответ: 0,504

Теорема сложения вероятностей несовместных событий: вероятность появления одного из двух **несовместных** событий A или B (без разницы какого), равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Рассмотрим событие $B_{5,6}$ – в результате броска игральной кости выпадет не менее пяти очков. Данное событие состоит в двух несовместных исходах: $B_{5,6}=B_5+B_6$ (выпадет 5 **или**6 очков). По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$P(B_5+B_6)=P(B_5)+P(B_6)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ – вероятность того, что в результате броска игральной кости выпадет не менее пяти очков.

Событие $B_{1-4}=B_1+B_2+B_3+B_4$, состоящее в том, что выпадет не более 4 очков и найдем его вероятность. По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(B_1+B_2+B_3+B_4)=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)+P(B_4)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

По той же теореме, вероятность того, что выпадет нечётное число очков:

$P(B_1+B_3+B_5)=P(B_1)+P(B_3)+P(B_5)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$ и так далее.

Задача

«Студент знает ответы на 25 экзаменационных вопросов из 60. Какова вероятность сдать экзамен, если для этого необходимо ответить не менее чем на 2 из 3 вопросов?»

В той задаче мы сначала нашли C_{60}^3 (количество всех возможных **сочетаний** трёх вопросов), затем вычислили $C_{25}^2\cdot C_{35}^1+C_{25}^3$ количество благоприятствующих исходов и вероятность $p=\frac{C_{25}^2\cdot C_{35}^1+C_{25}^3}{C_{60}^3}$ того, что студент сдаст экзамен.

Задача

Магазин получил продукцию в ящиках с четырех оптовых складов: четыре с 1-го, пять со 2-го, семь с 3-го и четыре с 4-го. Случайным образом выбран ящик для продажи. Какова вероятность того, что это будет ящик с первого или третьего склада.

Решение: всего получено магазином: 4 + 5 + 7 + 4 = 20 ящиков.

В данной задаче удобнее воспользоваться «быстрым» способом оформления без расписывания событий большими латинскими буквами. По классическому определению:

$p_1=\frac{4}{20}=0{,}2$ – вероятность того, что для продажи будет выбран ящик с 1-го склада;

$p_3=\frac{7}{20}=0{,}35$ – вероятность того, что для продажи будет выбран ящик с 3-го склада.

По теореме сложения несовместных событий:

$p=p_1+p_3=0{,}2+0{,}35=0{,}55$ – вероятность того, что для продажи будет выбран ящик с первого или третьего склада.

Ответ: 0,55

Задачи для самостоятельного решения.

Решение задач, на определение вероятности с использованием теорем сложения и умножения.

№1. При бросании игральной кости вычислить вероятность события «Выпало 2 очка».

№2. В мешочке имеется 5 одинаковых кубиков. На всех гранях каждого кубка написана одна из следующих букв: о, п, р, с, т. Найти вероятность того, что на вытянутых по одному и расположенных «в одну линию» кубиков можно будет прочесть слово «спорт».

№3. В цехе работают 6 мужчин и 4 женщины. По табельным номерам наудачу отобраны семь человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся три женщины.

№4. По цели произведено 20 выстрелов, причем зарегистрировано 18 попаданий. Найти относительную частоту попаданий в цель.

№5. В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что все извлеченные детали окажутся окрашены.

№6. В окружность вписан квадрат. В круг наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что эта точка попадает в квадрат.

№7. При бросании монеты вычислить вероятность выпадения «решки».

№8. Пять различных книг расставлены наудачу на одной полке. Найти вероятность того, что две определенные книги окажутся рядом.

№9. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов, найти вероятность того, что среди отобранных студентов 5 отличников.

№10.При испытании партии приборов относительная частота годных приборов оказалась равной 0,9. Найти число годных приборов, если всего было проверено 200 приборов.

№11. В конверте среди 100 фотокарточек находится одна розыскиваемая. Из конверта наудачу извлекают 10 карточек. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная.

№12. В окружность вписан квадрат. В круг наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что эта точка попадает в круг.

Математическая статистика.

Каждое исследование в области случайных явлений своими корнями всегда уходит в эксперимент, в опытные данные. Числовые данные, которые собирают при изучении какого-либо признака некоторого объекта, называются статистическими. Статистические данные являются первоначальным материалом исследования. Для того, чтобы они представляли научную или практическую ценность, их надо обработать методами математической статистики.

Математическая статистика - это научная дисциплина, предметом изучения которой является разработка методов регистрации, описания и анализа статистических экспериментальных данных, полученных в результате наблюдений массовых случайных явлений.

Основными задачами математической статистики являются:

- определение закона распределения случайной величины или системы случайных величин;
- проверка правдоподобия гипотез;
- определение неизвестных параметров распределения.

Все методы математической статистики основаны на теории вероятностей. Однако в силу специфичности решаемых задач математическая статистика выделяется из теории вероятностей в самостоятельную область. Если в теории вероятностей считается заданной модель явления и производится расчет возможного реального течения этого явления (рис.1), то в математической статистике подбирается подходящая теоретико-вероятностная модель, исходя из статистических данных (рис.2).

Рис.1. Общая задача теории вероятностей

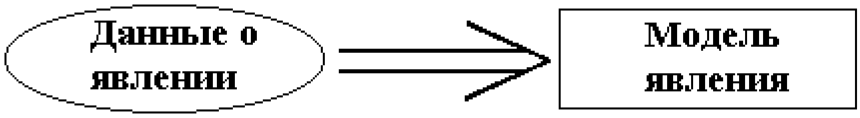


Рис.2. Общая задача математической статистики

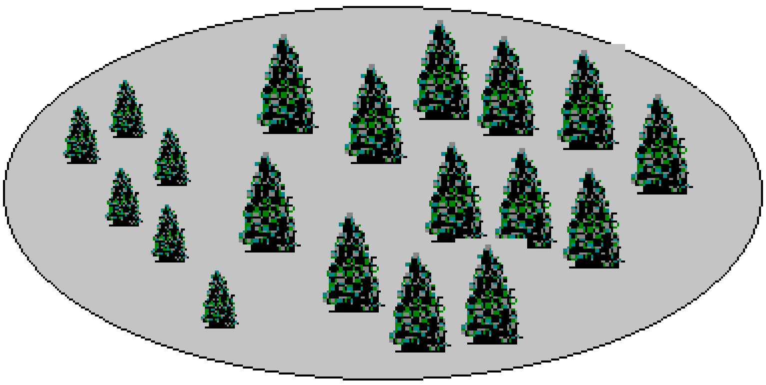
Как научная дисциплина математическая статистика развивалась вместе с теорией вероятностей. Математический аппарат этой науки построен во второй половине XIX века.

Генеральная совокупность и выборка.

Для изучения статистических методов вводятся понятия генеральной и выборочной совокупностей. В общем случае под генеральной совокупностью понимается случайная величина X с функцией распределения $F(x)$. Выборочной совокупностью или выборкой объемаn для данной случайной величины X называется набор $x_1, x_2, \ldots, x_n$ независимых наблюдений этой величины, где x_i носит название выборочного значения или реализации случайной величиныX. Таким образом, x_i можно рассматривать как числа (если эксперимент проведен и выборка состоялась) и как случайные величины (до проведения эксперимента), поскольку они меняются от выборки к выборке.

Пример 1. Для определения зависимости толщины ствола дерева от его высоты было отобрано 200 деревьев. В данном случае объем выборки n=200.

Пример 2. В результате распиловки древесностружечных плит на круглопильном станке было получено 15 значений удельной работы резания. В этом случае n=15.



Для того чтобы по данным выборки уверенно судить об интересующем нас признаке генеральной совокупности, объекты выборки должны правильно ее представлять, то есть выборка должна бытьрепрезентативной (представительной).

Репрезентативность выборки обычно достигается случайностью отбора объектов: каждому объекту генеральной совокупности обеспечивается равная со всеми остальными вероятность попадания в выборку.

Определение моды и медианы в статистике.

Средние арифметическая и гармоническая являются обобщающими характеристиками совокупности по тому или иному варьирующему признаку. Вспомогательными описательными характеристиками распределения варьирующего признака являются мода и медиана.

Модой в статистике называется величина признака (варианта), которая чаще всего встречается в данной совокупности. В вариационном ряду это будет варианта, имеющая наибольшую частоту.

Медианной в статистике называется варианта, которая находится в середине вариационного ряда. Медиана делит ряд пополам, по обе стороны от нее (вверх и вниз) находится одинаковое количество единиц совокупности.

Мода и медиана в отличии от степенных средних являются конкретными характеристиками, их значение имеет какая-либо конкретная варианта в вариационном ряду.
Мода применяется в тех случаях, когда нужно охарактеризовать наиболее часто встречающуюся величину признака. Если надо, например, узнать наиболее распространенный размер заработной платы на предприятии, цену на рынке, по которой было продано наибольшее количество товаров, размер ботинок, пользующийся наибольшим спросом у потребителей, и т.д., в этих случаях прибегают к моде.
Медиана интересна тем, что показывает количественную границу значение варьирующего признака, которую достигла половина членов совокупности. Пусть средняя заработная плата работников банка составила 650000 руб. в месяц. Эта характеристика может быть дополнена, если мы скажем, что половина работников получила заработную плату 700000 руб. и выше, т.е. приведем медиану. Мода и медиана являются типичными характеристиками в тех случаях, когда взяты совокупности однородные и большой численности.

Нахождение моды и медианы в дискретном вариационном ряду

Найти моду и медиану в вариационном ряду, где значения признака заданы определенными числами, не представляет большой трудности. Рассмотрим таблицу 1. с распределение семей по числу детей.

Таблица 1. Распределение семей по числу детей

Группа семей по числу детей	Число семей
0	10
1	30
2	75
3	35
4	20
5	15
Итого	185

Очевидно, в этом примере модой будет семья, имеющая двоих детей, так как этому значению варианты соответствует наибольшее число семей. Могут быть распределения, где все варианты встречаются одинаково часто, в этом случае моды нет или, иначе, можно сказать, что все варианты одинаково модальны. В других случаях не одна, а две варианты могут быть наибольшей частоты. Тогда будет две моды, распределение будет бимодальным. Бимодальные распределения могут указывать на качественную неоднородность совокупности по исследуемому признаку.
Чтобы найти медиану в дискретном вариационном ряд, нужно сумму частот разделить пополам и к полученному результату добавить ½. Так, в распределении 185 семьи по числу детей медианой будет: 185/2 + ½ = 93, т.е. 93-я варианта, которая делит упорядоченный ряд пополам. Каково же значение 93-ей варианты? Для того чтобы это выяснить, нужно накапливать частоты, начиная, от наименьшей варианты. Сумма частот 1-й и 2-й вариант равна 40. Ясно, что здесь 93 варианты нет. Если прибавить к 40 частоту 3-й варианты, то получим сумму, равную 40 + 75 = 115. Следовательно, 93-я варианта соответствует третьему значению варьирующего признака, и медианой будет семья, имеющая двоих детей.
Мода и медиана в данном примере совпали. Если бы у нас была четная сумма частот (например, 184), то, применяя указанную выше формулу, получим номер медианной варианты, 184/2 + ½ =92,5. Поскольку варианты с дробным номером не существует, полученный результат указывает, что медиана находится посередине между 92 и 93 вариантами.

Среднее (или среднее арифметическое) выборки- это число ,равное отношению суммы всех чисел выборки к их количеству.

Задание №1.

1.Найти моду выборки:

1) 4; 15; 6; 7; 3; 6; 8. 2)18; 9; 5; 3; 7; 9; 1 3)6; 8; 5; 4; 8; 3; 6.

2.Найти медиану выборки:

1)17; 12; 34; 18; 6. 2)24; 15; 13; 20; 21. 3) 15; 6; 12; 8; 9; 14.

3. Найти среднее значение выборки:

1)24; -5; 13; -8. 2) 7; 16; -9; -2; 10. 3)1,3; 1,4; 1,3; 0,9; 0,9; 1,4.

Задание № 2: Решение практических задач на обработку числовых данных, вычисление их характеристик. Выполнить задания :1.Известен возрастной состав абитуриентов по отделениям.В таблице приведен возраст некоторых из них

N	Отделение	лет									
1	Коммерция	15	17	16	16	18	18	16	20	16	19	18
2	Технология деревообработки	16	18	17	17	21	17	20	19	19	17	17
3	Вычислительная техника	16	16	19	15	18	17	17	15	15	19	20
4	Конструирование одежды	15	16	18	18	25	20	19	20	18	15	17

Вычислить выборочное среднее возрастного состава абитуриентов по отделениям. Построить полигон частот используя данные отделения-«Вычислительная техника»

Задание №3.Найти выборочное среднее для вариационного ряда

x_1	2	3	4	6
n_1	2	2	3	3

4.Найти моду, медиану и среднее выборки

X	-4	0	2	4	6	8
м	3	3	4	2	1	5

Тема 11
Уравнения и неравенства

Показательные уравнения
Краткие теоретические сведения

Задача 1. Решить уравнение: $8^{x+2} = 32^{1-x}$.

Решение. Заметим, что $8 = 2^3$ и $32 = 2^5$:

$$\left(2^3\right)^{x+2} = \left(2^5\right)^{1-x},$$

то есть

$$2^{3(x+2)} = 2^{5(1-x)}.$$

Поскольку функция $y = 2^x$ монотонно возрастает, равенство $2^a = 2^b$ эквивалентно равенству $a = b$. Следовательно,

$$3(x+2) = 5(1-x),$$

откуда $x = -1/8$.

Ответ: $-\dfrac{1}{8}$.

Задача 2. Решить уравнение: $3^{x+1} + 3^x - 3^{x-2} = 35$.

Решение. Метод решения уравнений такого вида — вынести за скобки степень с наименьшим показателем. В данном случае выносим за скобки 3^{x-2}:

$$3^{x-2}(3^3 + 3^2 - 1) = 35 \quad \Leftrightarrow \quad 3^{x-2} \cdot 35 = 35 \quad \Leftrightarrow \quad 3^{x-2} = 1.$$

Последнее равенство запишем как $3^{x-2} = 3^0$ и ввиду монотонности показательной функции заключаем, что $x - 2 = 0$, то есть $x = 2$.

Ответ: 2.

Задача 3. Решить уравнение: $4^x - 2^{x+1} - 8 = 0$.

Решение. Перепишем уравнение следующим образом:

$$2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 8 = 0.$$

Вводя замену $t = 2^x$, получим квадратное уравнение относительно t:

$$t^2 - 2t - 8 = 0.$$

Находим его корни: $t_1 = 4$, $t_2 = -2$. Остаётся сделать обратную замену.

Уравнение $2^x = 4$ имеет единственный корень $x = 2$. Уравнение $2^x = -2$ корней не имеет, так как показательная функция $y = 2^x$ не может принимать отрицательных значений.

Ответ: 2.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решите уравнение:

а) $2^x = 32$; б) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x = 9$;

в) $4^{x+2} = 64$; г) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{2x-3} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

2. Решите уравнение:

а) $3^{x^2-3x+2}=1$; б) $2^{7-3x}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-4}$;

в) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{3x-7}=\left(\dfrac{5}{2}\right)^{7x-3}$; г) $\left(\dfrac{2}{9}\right)^{2x+3}=4{,}5^{x-2}$.

3. Решите уравнение:

а) $\sqrt{2^x}\cdot\sqrt{3^x}=36$; б) $\sqrt{8^{x-3}}=\sqrt[3]{4^{2-x}}$;

в) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\dfrac{9}{8}\right)^x=\dfrac{64}{27}$; г) $\dfrac{1}{8}\sqrt{2^{x-1}}=4^{-1{,}25}$.

5. Решите уравнение:

а) $2^{x+2}+2^x=5$; б) $4^{x+1}+4^x=320$;

в) $7^{x+2}+4\cdot7^{x+1}=539$; г) $3\cdot5^{x+3}+2\cdot5^{x+1}=77$.

6. Решите уравнение:

а) $5^{x+1}-3\cdot5^{x-2}=122$; б) $0{,}2^{x-1}-0{,}2^{x+1}=4{,}8$;

в) $0{,}5^{3-2x}+3\cdot0{,}25^{1-x}=7$; г) $3^{2x-3}-9^{x-1}+27^{\frac{2x}{3}}=675$.

7. Решите уравнение:

а) $9^x-6\cdot3^x-27=0$; б) $100^x-11\cdot10^x+10=0$;

в) $4^x+2^{x+1}-8=0$; г) $5^{2x-1}+5^{x+1}=250$.

Иррациональные уравнения и неравенства

Краткие теоретические сведения

Задача 1. Решить неравенство: $\sqrt{2-x-x^2}>-1$.

Решение. Квадратный корень может принимать только неотрицательные значения, поэтому данное неравенство выполнено всегда, когда квадратный корень определён. Иными словами, множеством решений данного неравенства служит его ОДЗ:

$$2-x-x^2\geqslant 0\quad\Leftrightarrow\quad -2\leqslant x\leqslant 1.$$

Ответ: $[-2;1]$.

Задача 2. (*МГУ, социологич. ф-т, 1997*) Решить уравнение: $\sqrt{5x-10}=2-x$.

Решение. Найдём ОДЗ: $5x-10\geqslant 0$, то есть $x\geqslant 2$. При таких значениях x правая часть нашего уравнения неположительна, а левая — неотрицательна. Следовательно, равенство возможно лишь в том случае, когда обе части обращаются в нуль одновременно, то есть при $x=2$.

Ответ: 2.

Задача 3. Решить уравнение: $\sqrt{6x-x^2-8}+\sqrt{x-4}=x^2-7x+12$.

Решение. Найдём ОДЗ:

$$\begin{cases}6x-x^2-8\geqslant 0,\\ x-4\geqslant 0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}2\leqslant x\leqslant 4,\\ x\geqslant 4\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad x=4.$$

Таким образом, ОДЗ нашего уравнения состоит из одной-единственной точки, и остаётся лишь проверить её. Подставляем $x=4$ в уравнение и убеждаемся, что данное число действительно является корнем.

Ответ: 4.

Задача 5. Решить уравнение: $\sqrt{x^2-6x+4}=\sqrt{x-1}$.

Решение. Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2-6x+4=x-1, \\ x-1\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-7x+5=0, \\ x-1\geqslant 0. \end{cases}$$

Уравнение полученной системы имеет корни

$$x_1=\frac{7+\sqrt{29}}{2}, \quad x_2=\frac{7-\sqrt{29}}{2}.$$

Число x_1 удовлетворяет неравенству системы очевидным образом и потому является корнем исходного уравнения. Проверим x_2:

$$x_2-1=\frac{7-\sqrt{29}}{2}-1=\frac{5-\sqrt{29}}{2}=\frac{\sqrt{25}-\sqrt{29}}{2}<0.$$

Следовательно, x_2 не является корнем исходного уравнения.

Заметьте, что проверить неотрицательность выражения $x-1$ (при таких-то x_1 и x_2!) оказывается существенно легче, чем делать это для квадратного трёхчлена x^2-6x+4.

Ответ: $\frac{7+\sqrt{29}}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить неравенство: $\sqrt{x^2+2x-3}\geqslant -2$.

2. Решить неравенство: $\sqrt{4x-3-x^2}\neq 0$.

3. Решить уравнение: $\sqrt{-3x+3}=x-1$.

4. Решить уравнение: $\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2-x-x^2}=\sqrt{x}-1$.

5. Решить уравнение:

а) $\sqrt{x^2-7x+1}=\sqrt{2x^2-15x+8}$; б) $\sqrt{2x^2+x-4}=\sqrt{3x+3}$.

6. Решить неравенство:

а) $\sqrt{2-x}<\sqrt{3x^2-2x-2}$; б) $\sqrt{3x-\frac{23}{4}}\geqslant\sqrt{x^2+2x-8}$.

Логарифмические уравнения и неравенства

Краткие теоретические сведения

При решении **логарифмических уравнений** мы постоянно используем отмеченные выше свойства логарифмической функции: она монотонна и может принимать любые значения. Кроме того, необходимо следить за областями определения логарифмов:

1. переменный аргумент логарифма должен быть положительным;

2. переменное основание логарифма должно быть положительным и не равным единице.

Задача 1. Решить уравнение: $\log_2(x-2)+\log_2(x-3)=1$.

Решение. Оба логарифма одновременно определены при выполнении системы неравенств:

$$\begin{cases} x-2>0, \\ x-3>0, \end{cases}$$

то есть при $x > 3$.

Напомним, что пересечение областей определения всех функций, входящих в уравнение или неравенство, называется *областью допустимых значений* (*ОДЗ*) данного уравнения или неравенства. Таким образом, ОДЗ нашего уравнения есть множество $x > 3$.

Найдя ОДЗ, переходим к преобразованиям уравнения. Имеем:

$$\log_2(x-2)(x-3) = 1,$$

откуда

$$(x-2)(x-3) = 2.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные, получаем квадратное уравнение

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

с корнями 1 и 4. При этом число 1 не принадлежит ОДЗ и поэтому не является корнем исходного уравнения. Число 4 входит в ОДЗ и, следовательно, будет корнем исходного уравнения.

Ответ: 4.

Замечание. Искать ОДЗ здесь было не обязательно. Можно, минуя нахождение ОДЗ, найти корни преобразованного уравнения (1 и 4) и затем просто подставить каждый из них в исходное уравнение, выяснив, кто годится, а кто — нет. Действительно, легко проверить, что при $x = 4$ исходное уравнение превращается в верное числовое равенство, а при $x = 1$ получаются отрицательные числа под логарифмами.

Задача 2. Решить уравнение:

$$\lg\left(x^2 + 2x - 5\right) - \lg(x-1) = 2\lg 3. \tag{2}$$

Решение. При нахождении ОДЗ нас поджидает первая (пусть и небольшая) неприятность: корни трёхчлена $x^2 + 2x - 5$ иррациональны. Но это ещё полбеды. Главная неприятность состоит в другом: корни преобразованного уравнения окажутся такими, что проверка их на вхождение в ОДЗ или непосредственная подстановка их в исходное уравнение потребуют громоздких вычислений.

Заметим, что исходное уравнение (2) равносильно системе:

$$\begin{cases} \lg\dfrac{x^2+2x-5}{x-1} = 2\lg 3, \\ x - 1 > 0. \end{cases} \tag{3}$$

В самом деле, всякий корень уравнения (2) удовлетворяет системе (3). Обратно, пусть x_0 есть решение системы (3). Тогда, согласно определению логарифма, выполнено неравенство

$$\frac{x_0^2 + 2x_0 - 5}{x_0 - 1} > 0.$$

С учётом неравенства $x_0 - 1 > 0$ получаем отсюда $x_0^2 + 2x_0 - 5 > 0$, так что x_0 будет корнем уравнения (2).

Итак, нам нужно решить уравнение системы (3) и отобрать те его корни, которые удовлетворяют неравенству $x - 1 > 0$.

Записываем уравнение системы (3) в виде:

$$\lg \frac{x^2+2x-5}{x-1} = \lg 9.$$

В силу монотонности функции $y = \lg x$ получаем отсюда:

$$\frac{x^2+2x-5}{x-1} = 9.$$

Преобразуя, приходим к квадратному уравнению

$$x^2 - 7x + 4 = 0,$$

корни которого равны:

$$x_1 = \frac{7+\sqrt{33}}{2}, \quad x_2 = \frac{7-\sqrt{33}}{2}.$$

Нам остаётся выяснить, удовлетворяют ли числа x_1 и x_2 неравенству $x - 1 > 0$.

Число x_1 удовлетворяет этому неравенству очевидным образом, поскольку $x_1 > 7/2$. Следовательно, x_1 — корень исходного уравнения (2).

Проверяем x_2:

$$x_2 - 1 = \frac{7-\sqrt{33}}{2} - 1 = \frac{5-\sqrt{33}}{2} = \frac{\sqrt{25}-\sqrt{33}}{2} < 0.$$

Таким образом, x_2 не является корнем исходного уравнения.

Ответ: $\dfrac{7+\sqrt{33}}{2}$.

Задача 3. Решить уравнение: $\log_4^2 x + \log_4 \sqrt{x} - 1{,}5 = 0$.

Решение. Заметим, что $\log_4 \sqrt{x} = \log_4 x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_4 x$. Имеем, таким образом:

$$\log_4^2 x + \frac{1}{2}\log_4 x - \frac{3}{2} = 0.$$

Замена $t = \log_4 x$ приводит к квадратному уравнению относительно t:

$$2t^2 + t - 3 = 0,$$

корни которого равны 1 и $-3/2$. Обратная замена:

$$\left[\begin{array}{l} \log_4 x = 1, \\ \log_4 x = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = 4^{-\frac{3}{2}} = \left(2^2\right)^{-\frac{3}{2}} = 2^{-3} = \dfrac{1}{8}. \end{array}\right.$$

Ответ: 4, $\dfrac{1}{8}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решите уравнение:

а) $\log_2 x = 5$; б) $\log_{0,1} x = -2$;

в) $\lg x = \dfrac{1}{2}$; г) $\log_{\frac{1}{27}} x = -\dfrac{1}{3}$.

2. Решите уравнение:

а) $\log_8 x = \dfrac{2}{3}$; б) $\log_9 x = -2{,}5$;

в) $\log_{16} x = -\dfrac{3}{4}$; г) $\log_{\frac{1}{81}} x = -\dfrac{3}{2}$.

3. Решите уравнение:

а) $\log_7(x^2 - 3x + 3) = 0$; б) $\log_{0,4}(2x - 3) = \log_{0,4}(x + 5)$;

в) $\lg(x - 7) = \lg(3x - 9)$; г) $\log_3(x^2 - 6x) = \log_3(5 - 2x)$.

4. Решите уравнение:

а) $\log_3^2 x - \log_3 x = 2$; б) $\dfrac{2}{\lg x - 3} + \dfrac{4}{\lg x + 1} = 1$;

в) $\log_{0,5}^2 x - \log_2 x - 6 = 0$; г) $\dfrac{1}{1 - \log_5 \frac{x}{25}} + \dfrac{2}{\log_5 5x - 2} = 3$.

5. Решите уравнение:

а) $\log_3(x + 1) + \log_3(x + 3) = 1$; б) $\lg(3x^2 + 12x + 19) - \lg(3x + 4) = 1$;

в) $\lg(x - 9) + \lg(2x - 1) = 2$; г) $\log_2(x^2 - x - 3) - \log_2(x + 1) = 3$.

7. Решите уравнение:

а) $\log_5^2 x - 2\log_5 x^2 + 4 = 0$; б) $\log_{0,5}(2x - 3) - \dfrac{1}{2}\log_{0,5}(2x + 3) = 0$;

в) $\lg^2 x - 6\lg\sqrt{x} = \dfrac{2}{3}\lg x^3 - 4$; г) $2\log_4(4 - x) = 4 - \log_2(-x - 2)$.

11. Решите неравенство:

а) $\log_2 x > 4$; б) $\log_3 x \leqslant 2$;

в) $\log_{0,8} x < 0$; г) $\log_{\frac{1}{4}} x \geqslant -3$.

12. Решите неравенство:

а) $\log_5(x-3) \geqslant 1$; б) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-6) > -1$;

в) $\log_4\left(\frac{3x}{2}+1\right) \leqslant 2$; г) $\log_{0,1}(x^2-5x+196) < -2$.

13. Решите неравенство:

а) $\lg(2x-3) > \lg(x+1)$; б) $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1) \geqslant \log_{\frac{1}{3}}(x+4)$;

в) $\log_2(x^2-2x-2) > \log_2(4-x)$; г) $\log_{0,7}(x^2-3x+2) \geqslant \log_{0,7}(x+7)$.

14. Решите неравенство:

а) $\log_7 x + \log_7(x+1) \leqslant \log_7 2$; б) $\log_{\frac{1}{2}}(4-x) \geqslant \log_{\frac{1}{2}} 2 - \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$;

в) $\lg(x+2) - \lg(x-1) > 1$; г) $1 + \log_2(x-2) > \log_2(x^2-3x+2)$.

15. Решите неравенство:

а) $\lg^2 x - 2\lg x - 3 < 0$; б) $\log_2^2 x \geqslant 9$;

в) $\log_{\frac{1}{3}}^2 x + \log_{\frac{1}{3}} x - 6 \leqslant 0$; г) $\log_{0,5}^2 < 4$.

Тригонометрические уравнения

Краткие теоретические сведения

1) $2\sin^2 x + 5\cos x = 4$

уравнение содержит функции одинакового угла, можно привести к квадратному уравнению, если заменить $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$:

$$2\left(1-\cos^2 x\right) + 5\cos x = 4$$

$$2 - 2\cos^2 x + 5\cos x - 4 = 0$$

$$-2\cos^2 x + 5\cos x - 2 = 0$$

$$2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$$

Пусть $\cos x = t$, тогда

$2t^2 - 5t + 2 = 0$ $D = 25 - 4\cdot 2\cdot 2 = 25 - 16 = 9$

$t_{1,2} = \frac{5\pm 3}{4}$; $t_1 = 2$ $t_2 = \frac{1}{2}$ и тогда имеем два простейших уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ и $\sin x = 2$

решаем их, применяя формулу решения уравнения $\underline{\sin x = a}$

$\sin x \neq 2$ уравнение не имеет решения, т.к. $\lvert\sin x\rvert \leq 1$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$$

И тогда, ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

2) $2\sin^2 x + 5\sin\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) - 2 = 0$

функции имеют разные углы, приведем к одному углу, используя формулы приведения:

$2\sin^2 x - 5\cos x - 2 = 0$, т.к. $\sin\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = -\cos x$

учитывая, что $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$, имеем:

$2\left(1-\cos^2 x\right)-5\cos x-2=0$ $\qquad$ $2\cos^2 x+5\cos x=0$

$2-2\cos^2 x-5\cos x-2=0$ $\qquad$ $\cos x\left(2\cos x+5\right)=0$

произведение равно 0, если хотя бы один из сомножителей равен 0, имеем

$\cos x=0$ $\qquad$ $2\cos x+5=0$

$x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$ $\qquad$ и $\qquad$ $\cos x\neq -\frac{5}{2}$ $\quad$ – уравнение не имеет решения, т.к. $\left|\cos x\right|\leq 1$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$.

3) $tg^3 x=tgx$

$tg^3 x-tgx=0$

$tgx\left(tg^2 x-1\right)=0\Rightarrow$

$tgx=0$

$x=\pi n, n\in Z$ $\qquad$ и $\qquad$ $tg^2 x-1=0; tg^2 x=1$ и тогда $tgx=\pm 1$ $\qquad$ $x=\pi k\pm\frac{\pi}{4}, k\in Z$

Ответ: $x=\pi n, n\in Z;\quad x=\pi k\pm\frac{\pi}{4}, k\in Z$.

4) $\sin 7x+\sin 2x=0$

левую часть уравнения можно преобразовать в произведение, используя формулу

$\sin\alpha+\sin\beta= \;=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$2\sin\frac{7x+2x}{2}\cdot\cos\frac{7x-2x}{2}=0$

$2\sin\frac{9}{2}x\cdot\cos\frac{5}{2}x=0$ и тогда

$\sin\frac{9}{2}x=0$ $\qquad$ или $\qquad$ $\cos\frac{5}{2}x=0$

$\frac{9}{2}x=\pi n, n\in Z$ $\qquad$ $\frac{5}{2}x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$

$\underline{x=\frac{2}{9}\pi n, n\in Z}$ $\qquad$ $\underline{x=\frac{\pi}{5}+\frac{2}{5}\pi k, k\in Z}$

Ответ: $\underline{x=\frac{2}{9}\pi n, n\in Z}$ $\qquad$ $\underline{x=\frac{\pi}{5}+\frac{2}{5}\pi k, k\in Z}$.

5) $4\cos^3 x+4\cos^2 x-3\cos x-3=0$

левую часть можно преобразовать в произведение, используя способ группировки:

$\left(4\cos^3 x+4\cos^2 x\right)-\left(3\cos x+3\right)=0$

$4\cos^2 x\left(\cos x+1\right)-3\left(\cos x+1\right)=0$

$\left(\cos x+1\right)\left(4\cos^2 x-3\right)=0$

и тогда

$\cos x+1=0$ $\qquad$ или $\qquad$ $4\cos^2 x-3=0$

$\cos x=-1$ $\qquad$ $\cos^2 x=\frac{3}{4}$

$\underline{x=\pi+2\pi n, n\in Z}$ $\qquad$ $\cos x=\pm\sqrt{\frac{3}{4}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\underline{x = \pi k \pm \frac{\pi}{3}, k \in Z}$$

Ответ: $x = \pi k \pm \frac{\pi}{3}, k \in Z$ $\quad x = \pi + 2\pi n, n \in Z$.

6) Рассмотрим уравнение $\sin^2 x - 10\sin x \cdot \cos x + 21\cos^2 x = 0$

Замечаем, что левая часть уравнения есть однородный многочлен относительно функций $\sin x$ и $\cos x$, а правая часть равна нулю.

Такие уравнения называются однородными тригонометрическими уравнениями. Для их решения надо каждый член уравнения разделить на $\cos x$ или $\sin x$ в той степени, какова степень уравнения:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{10\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} + \frac{21\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$tg^2 x - 10tgx + 21 = 0,$

решаем квадратное уравнение относительно функции tgx.

Пусть $tgx = t$, тогда

$t^2 - 10t + 21 = 0$

$D = 100 - 84 = 16$

$t_{1,2} = \frac{10 \pm 4}{2}; \quad t_1 = 7; \quad t_2 = 3$

тогда $tgx = 7$ $\qquad tgx = 3$

$x = arctg7 + \pi n, n \in Z$ $\qquad x = arctg3 + \pi n, n \in Z$

$\underline{x = 81^\circ 52' + 180^\circ n, n \in Z}$ $\qquad x = 71^\circ 33' + 180^\circ n, n \in Z$

Ответ: $x = 81^\circ 52' + 180^\circ n, n \in Z$ $\qquad x = 71^\circ 33' + 180^\circ n, n \in Z$.

7) $3\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x = 2$

Данное уравнение приводится к однородному тригонометрическому уравнению; для этого представим $2 = 2\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$.

Имеем:

$3\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x = 2\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$

$3\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x - 2\sin^2 x - 2\cos^2 x = 0$

$\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x = 0$

разделим на $\cos^2 x$

$tg^2 x - 4tgx + 3 = 0$

$tgx = t; \quad t^2 - 4t + 3 = 0$

$D = 16 - 12 = 4$

$t_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2}; \quad t_1 = 3; t_2 = 1$

$tgx = 3$ $\qquad tgx = 1$

$x = arctg3 + \pi n, n \in Z$

$\underline{x = 71^\circ 33' + 180^\circ n, n \in Z}$ $\qquad \underline{x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z}$

Ответ: $x = 71^\circ 33' + 180^\circ n, n \in Z$ $\qquad x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

Задачи для самостоятельного решения

1 Решить уравнения:

1. $\sin 2x = \frac{1}{2}$; 2. $\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$; 3. $tg5x = 1$; 4. $\sin\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$; 5. $ctg\frac{x}{2} = 0$;

6. $\sin\frac{x}{2} = -1$; 7. $\cos 3x = 1$; 8. $tg\frac{x}{2} = 0$; 9. $tg\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$; 10. $ctg4x = 1$;

11. $\sin 4x \cdot tg\frac{x}{2} = 0$; 12. $\cos 2x \cdot tgx = 0$; 13. $\sin 2x \cdot \cos x - \cos 2x \cdot \sin x = 0$;

14. $2\sin^2 x = 1$; 15. $\cos^2 x = 1$; 16. $ctg^2 x = 3$; 17. $tg^2 x = 1$; 18. $tg^3 x = tgx$;

19. $tgx(\sin x + \cos x) = 0$; 20. $\cos x(tgx - 1) = 0$; 21. $tg\frac{x}{2} \cdot (1 + \cos x) = 0$;

22. $\sin 3x \cdot \cos x - \cos 3x \cdot \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 23. $\cos 4x \cdot \cos x + \sin 4x \cdot \sin x = -\frac{1}{2}$;

24. $4\sin^3 x + 4\sin^2 x - 3\sin x - 3 = 0$; 25. $2\cos x + tgx - 2tgx \cdot \cos x - 1 = 0$;

2 Решить уравнения:

1. $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$; 2. $4\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$;

3. $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$; 4. $\cos^2 4x - \sin^2 4x - \cos 4x = 0$;

5. $\cos 2x = \sin x$; 6. $3\sin^2\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) - \cos(x + 4\pi) = 0$;

7. $2\sin^2 x + 5\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - 2 = 0$; 8. $2\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos 2x$;

9. $\cos^2(90° + x) - \cos^2 x - 3\cos(90° - x) + 2 = 0$;

10. $ctg^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - ctg\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) - 2 = 0$; 11. $4\sin x - \cos^2(\pi - x) - 4 = 0$;

12. $5ctg^2 x - 8ctgx + 3 = 0$; 13. $\sin^2 x - 10\sin x \cdot \cos x + 21\cos^2 x = 0$;

14. $\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x - 1 = 0$; 15. $3\sin^2 x - 4\cos^2 x = \frac{1}{2}\sin 2x$;

16. $\sin^2(x + \pi) - 10\sin(x + \pi) \cdot \cos(x - \pi) + 21\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = 0$;

17. $3\sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x - 5\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 0$; 18. $3\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x - 2 = 0$;

.19. $\sin 5x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 7x\right) = 0$; 20. $\cos(x - 70°) = \sin(x + 70°)$;

21. $\cos x = \sin 3x$; 22. $1 - \cos x = 2\sin\frac{x}{2}$;

23. $\sin(30° + x) + \sin(30° - x) = \frac{1}{2}$; 24. $\cos 15x = \sin 5x$;

25. $3\sin x + 4\cos x = 4$; 26. $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$; 27. $8\sin x + 3\cos x = 5$;

28. $3\sin 2x + 2\cos 2x = 2$; 29. $\cos 3x + \sin 2x \cdot \sin x = 0$;

42. $\sin 2x - 2\sin x = \cos 2x - 2\cos x + 1$; 43. $\sqrt{3}(\cos x + \sin 3x) = \cos 3x + \sin x$.

3. Решить неравенства:

1. $\cos x > -\frac{1}{2}$; 2. $tgx < -\sqrt{3}$; 3. $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

4. $ctgx > \sqrt{3}$; 4. $\sin x < 0$; 5. $ctgx < 1$;

6. $\sin x > -\frac{1}{2}$; 7. $tgx > \frac{\sqrt{3}}{3}$; 8. $\sin x > -1$;

9. $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 10. $\cos\frac{x}{2} < -\frac{1}{2}$; 11. $\sin\frac{x}{2} < 0$;

12. $ctgx > -\sqrt{3}$; 13. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) > \frac{1}{2}$; 14. $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. Решить системы уравнений:

1. $\begin{cases} x + y = a \\ \sin x + \sin y = a \end{cases}$; 2. $\begin{cases} 2^{\sin x + \cos y} = 1 \\ 16^{\sin^2 x + \cos^2 y} = 4 \end{cases}$; 3. $\begin{cases} x + y = a \\ tgx + tgy = a \end{cases}$; 4. $\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = 0{,}36 \\ \cos x \cdot \cos y = 0{,}14 \end{cases}$.

ВАРИАНТЫ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ ПО ТЕМАМ

1. Рациональные уравнения и системы

Вариант I

1) Решить уравнение: $\dfrac{4}{x+2}+\dfrac{13}{4-x^2}=4$

2) Выполнить действия и результат изобразить геометрически: $\dfrac{2-3i}{-1+4i^9}+2i^5-4i^2$ и найти модуль и аргумент результата.

3) Решить неравенство: $\dfrac{x-10}{5+2x}<2$

4) Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases}8x-3y=1,\\(x+2y)(8x-3y)=12;\end{cases}$ б) $\begin{cases}4{,}7x-5{,}2y=34{,}4\\2{,}8x+4{,}8y=-3{,}2;\end{cases}$

Вариант II

1) При каких значениях a $x<0$ и $y>3$, если $\begin{cases}x-5ay=3\\3x+y=2;\end{cases}$

2) Выполнить действия: $\dfrac{1+8i^7}{4-3i}-\dfrac{(5-i)^2}{7+i^5}$ и найти модуль и аргумент результата.

3) Решить системы уравнений:

а) $\begin{cases}x-2xy+y=-2\\x+2xy+y=10;\end{cases}$ б) $\begin{cases}1{,}7x+3{,}8y=3{,}3\\4{,}5x+5{,}4y=-9{,}9\end{cases}$

4) Решить уравнение: $\sqrt{3x^2-2}-2=x$

2. Показательные и логарифмические уравнения, их системы и неравенства

Вариант I

1) Решить уравнения: а) $\log_2(x+3)+\log_2(x-1)=5$; b) $3^x+3^{x+1}+3^{x+2}=7^x+7^{x+1}+7^{x+2}$

2) Указать область определения функции: $y=\dfrac{\sqrt{3-x}}{\ln(x+3)}$

3) Решить систему уравнений: $\begin{cases}2^{\log_2(3x-4)}=8\\\log_9\left(x^2-y^2\right)-\log_9(x+y)=0{,}5\end{cases}$

4) Решить неравенство: $3^{x-2}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-x}+8>0$

Вариант II

1) Решить уравнения:

а) $3^{2x}-2\cdot3^{2x-1}-2\cdot3^{2x-2}=1$ б) $\log_{\frac{1}{3}}\log_{\frac{1}{2}}x=-1$

2) Решить неравенства: а) $\log_{\frac{1}{5}}\dfrac{3-x}{x+2}<-1$ б) $2{,}5^{4-x}>\dfrac{8}{125}$

2) Построить схематически график функции: $y=\log_3(x-1)$

4) Найти x, если: а) $x = 49^{1-\log_7 2} - 5^{-\log_5 4}$ б) $\ln x = -0{,}73$

3. Тригонометрические уравнения.

Вариант I

Решить уравнения:

1) $\cos 2x = 0,26$

2) $ctg\left(\frac{x}{2} + 10^\circ\right) = 4,2$

3) $\sin\frac{x}{3} = -0,09$

4) $tg\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 0$

5) $\sin(2 - 3x) = 0,098$

6) $3\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 0$

7) $3\sin 2x = 2\cos x$

8) $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2 = 0$

9) $\cos x + 12\sin x = 9$

10) $\sin(20^\circ + x) + \cos(70^\circ + x) = 1$

Вариант II

Решить уравнения:

1) $\sin\frac{x}{3} = 0,78$

2) $\cos\left(\frac{x}{3} + 20^\circ\right) = 0,87$

3) $tg\frac{x}{3} = -0,09$

4) $ctg\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 0$

5) $\sin(2 - 3x) = 0,012$

6) $\cos^2\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) + 2\cos(\pi - x) + 2 = 0$

7) $3\sin 2x = 2\cos x$

8) $4\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x = 1$

9) $\cos x + 12\sin x = 9$

10) $\sin(20^\circ + x) + \cos(50^\circ + x) = 1$

Информационное обеспечение обучения

Основные источники:

1. Богомолов. Н. В. Алгебра и начала анализа: учебное пособие для СПО / Н. В. Богомолов. — М. : Издательство Юрайт, 2023. — 240 с. — (Серия : Профессиональное образование). Режим доступа: https://urait.ru/.
2. Богомолов. Н. В. Математика: учебник для СПО / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2023. — 401 с. — (Серия : Профессиональное образование). Режим доступа: https://urait.ru/.
3. Богомолов. Н. В. Практические занятия по математике: учебное пособие для СПО / Н. В. Богомолов. — 11-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2023. — 495 с. — (Серия : Профессиональное образование). Режим доступа: https://urait.ru/.
4. Кремер, Н. Ш. Математика для колледжей: учебное пособие для СПО / Н. Ш. Кремер, О. Г. Константинова, М. Н. Фридман; под ред. Н. Ш. Кремера. — 11-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2023. — 362 с. — (Серия : Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-15601-0. Режим доступа: https://urait.ru/.

Дополнительные источники:

1. Научно-популярный физико-математический журнал «Квант». Форма доступа: http://kvant.ras.ru
2. Научный журнал «Студенческий». Форма доступа: https://sibac.info/journal/student
3. Всероссийские интернет – олимпиады. Форма доступа: https://online-olympiad.ru
4. Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов. Форма доступа: http://school-collection.edu.ru
5. Научная электронная библиотека. Форма доступа: https://elibrary.ru
6. Открытый колледж. Математика. Форма доступа: https://mathematics.ru
7. Повторим математику. Форма доступа: http://www.mathteachers.narod.ru
8. Справочник по математике для школьников. Форма доступа: https://www.resolventa.ru/demo/demomath.htm
9. Средняя математическая интернет школа. Форма доступа: http://www.bymath.net
10. Федеральный портал «Российское образование». Форма доступа: http://www.edu.ru