

Приложение 2

к ООП по специальности
08.02.01 Строительство и
эксплуатация зданий и
сооружений

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРОВЕДЕНИЮ
ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ
по дисциплине МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
ПРИКЛАДНЫХ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ ЗАДАЧ
для специальности
08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений**

Тихорецк
2025

РАССМОТРЕНА

цикловой комиссией № 2
протокол №1 от 01.09.2025 г.

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель директора по УР
Н.Ю. Шитикова

Методические рекомендации по проведению практических занятий по дисциплине Математические методы решения прикладных профессиональных задач студентами специальности 08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений.

Данная методическая разработка содержит варианты индивидуальных заданий и методические указания по их выполнению.

Организация-разработчик: Тихорецкий техникум железнодорожного транспорта – филиал Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Ростовский государственный университет путей сообщения» (ТТЖТ – филиал РГУПС)

Разработчик:

Моисеева С.А., преподаватель ТТЖТ – филиала РГУПС

Рецензенты:

Максимова Л.В., преподаватель ТТЖТ – филиала РГУПС

Пояснительная записка

Методическое пособие по проведению практических занятий по дисциплине «Математические методы решения прикладных профессиональных задач» составлено в соответствии с рабочей программой дисциплины и учебным планом специальности 08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений. Рассчитано на 32 часа обязательной учебной нагрузки и охватывает все разделы изучаемой дисциплины: «Математический анализ», «Основы аналитической геометрии», «Теория вероятностей и математическая статистика».

Особое значение дисциплина имеет при формировании и развитии общих компетенций:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности;

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие;

ОК 04. Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами;

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста;

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных общечеловеческих ценностей;

ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях;

ОК 09. Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности;

ОК 10. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках;

ОК 11. Использовать знания по финансовой грамотности, планировать предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере.

Перечень практических работ

ПЗ №1 Вычисление скалярного произведения векторов, модуля вектора и угла между векторами. Определение расстояния между точками и координат середины отрезка.	
ПЗ № 2. Применение векторов для решения геометрических и практических задач.	
ПЗ № 3. Определение взаимного расположения прямых и угла между ними, расстояния от точки до прямой.	
ПЗ № 4. Вычисление пределов последовательностей и функций с применением различных методов. Исследование функции на непрерывность, определение точек разрыва.	
ПЗ № 5. Составление уравнения касательной и нормали.	
ПЗ № 6. Применение производной к исследованию функции и для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах.	
ПЗ № 7. Построение криволинейной трапеции. Применение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур и вычислению объёмов.	
ПЗ № 8. Составление статистического распределения выборки, построение полигона и гистограммы.	

ПЗ № 2. Применение векторов для решения геометрических и практических задач.

Задание 1

Точка M является серединой стороны AB в треугольнике с вершинами A , B и C . Найти:

- 1) угол BCM ,
- 2) площадь треугольника ABC .

Вариант	
1,11,21	$A(-5,-2,7), B(3,-2,1), C(-4,-2,0).$
2,12,22	$A(0,3,1), B(2,3,-1), C(1,2,-1).$
3,13,23	$A(-5,-15,2), B(-7,-15,6), C(-6,-15,7).$
4,14,24	$A(6,2,-3), B(4,-2,3), C(2,0,3).$
5,15,25	$A(2,5,-7), B(2,-3,-1), C(2,4,0).$
6,16,26	$A(-1,-1,5), B(3,-1,1), C(-1,1,3).$
7,17,27	$A(4,4,1), B(2,0,1), C(3,1,1).$
8,18,28	$A(-3,-10,3), B(3,-2,1), C(4,-2,-2).$
9,19,29	$A(1,-4,0), B(1,-2,0), C(1,-3,1).$
10,20,30	$A(4,-12,4), B(6,-8,-2), C(5,-8,-1).$

ПЗ № 3. Определение взаимного расположения прямых и угла между ними, расстояния от точки до прямой.

Задание 3

Даны вершины треугольника ABC . Найти:

- 1) длину стороны AB ;
- 2) уравнение стороны AB ;
- 3) уравнение высоты CD и ее длину;
- 4) уравнение окружности, для которой высота CD является диаметром.

Вариант	
1,11,21	$A(-2;1), B(10;10), C(8;-4).$
2,12,22	$A(-4;-1), B(8;8), C(6;-6).$
3,13,23	$A(-1;0), B(11;9), C(9;-5).$
4,14,24	$A(-3;-3), B(9;6), C(7;-8).$
5,15,25	$A(-3;0), B(9;9), C(7;-5).$
6,16,26	$A(-5;-2), B(7;7), C(5;-7).$
7,17,27	$A(-2;-1), B(10;8), C(8;-6).$
8,18,28	$A(-5;1), B(7;10), C(5;-4).$
9,19,29	$A(-2;-3), B(10;6), C(8;-8).$
10,20,30	$A(-6;1), B(6;10), C(-4;4).$

Образец решения

Даны вершины треугольника: $A(-5;7), B(7;-2), C(11;20)$. Найти:

- 1) длину стороны AB ;
- 2) уравнения сторон AB и AC и их угловые коэффициенты;
- 3) угол B в радианах;
- 4) уравнение высоты CD и ее длину;
- 5) уравнение медианы AE ;
- 6) координаты точки пересечения высоты CD и медианы AE .

Решение.

- 1) Найдем длину стороны AB по формуле

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(7 + 5)^2 + (-2 - 7)^2} = 15.$$

- 2) Уравнение прямой, проходящей через две точки имеет вид $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

Тогда уравнение стороны AB :

$$\frac{y - 7}{-2 - 7} = \frac{x + 5}{7 + 5} \Rightarrow \frac{y - 7}{-9} = \frac{x + 5}{12} \Rightarrow 3x + 4y - 13 = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4},$$

а угловой коэффициент $k_{AB} = -\frac{3}{4}$.

Аналогично, уравнение стороны BC :

$$\frac{y + 2}{22} = \frac{x - 7}{4} \Rightarrow 11x - 2y - 81 = 0, k_{BC} = \frac{11}{2}.$$

- 3) Внутренний угол B замещается вращением стороны BC против часовой стрелки до совпадения с AB , поэтому, используя формулу $tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$, надо в ней считать за первую прямую — BC , а за вторую — AB . Тогда

$$tgB = \frac{k_{AB} - k_{BC}}{1 + k_{AB} \cdot k_{BC}} = \frac{-\frac{3}{4} - \frac{11}{2}}{1 - \frac{33}{8}} = 2 \Rightarrow B = arctg 2 = 1,11.$$

- 4) Отметив, что угловые коэффициенты k_1 и k_2 перпендикулярных прямых связаны зависимостью $k_1 \cdot k_2 = -1$, т.е. $k_{CD} = \frac{4}{3}$, используем уравнение пучка прямых,

проходящих через данную точку $C: (y - y_C) = k(x - x_C)$. Отсюда уравнение высоты CD имеет вид

$$(y - 20) = -\frac{4}{3}(x - 11) \Rightarrow 4x - 3y + 16 = 0.$$

Расстояние от точки $(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ можно определить по формуле $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3 \cdot 11 + 4 \cdot 20 - 13|}{\sqrt{9 + 16}} = 20$.

5) Найдем координаты точки E - середины отрезка BC :

$$x_E = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{7 + 11}{2} = 9, y_E = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-2 + 20}{2} = 9.$$

Используя уравнение прямой, проходящей через две точки, получим уравнение медианы AE :

$$\frac{y - 7}{2} = \frac{x + 5}{14} \Rightarrow x - 7y + 54 = 0.$$

6) Точку K пересечения высоты CD и медианы AE , находим, решив систему уравнений,

$$\begin{cases} 4x - 3y + 16 = 0 \\ x - 7y + 54 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow K(2; 8)$$

Раздел 3. Основы математического анализа

ПЗ № 4. Вычисление пределов последовательностей и функций с применением различных методов. Исследование функции на непрерывность, определение точек разрыва.

Задание 1

Найти указанные пределы.

- | | | |
|--|--|---|
| 1. а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1};$ | б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + x - 2x^2}{5x^2 - x + 4};$ | в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+4} - 2}.$ |
| 2. а) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 25x}{x^2 - 8x + 15};$ | б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{1 - 2x^2};$ | в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{1 - \sqrt{x+1}}.$ |
| 3. а) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^3 - 5x^2 + 6x};$ | б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2x + 2x^2}{2 + x - 3x^2};$ | в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{5x^2 + 2x}.$ |
| 4. а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^2 - x - 2};$ | б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x}{1 - 2x^2};$ | в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x + x^2}{\sin x - \sin 3x}.$ |
| 5. а) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{8 + x^3}{x^2 + 7x + 10};$ | б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 4x - x^2}{3x^2 - x};$ | в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^3 - 2x^2}.$ |
| 6. а) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^3 - 16x}{x^2 + 10x + 24};$ | б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 4x - 3}{x^2 + 7};$ | в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x+1} - 1}{\operatorname{tg} 2x}.$ |
| 7. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - x^3};$ | б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 3x^2}{x^2 - 4x + 2};$ | в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{3 - \sqrt{x+9}}.$ |
| 8. а) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4x - 12}{4 - x^3};$ | б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 3x^2}{x^2 + 2x - 1};$ | в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 3x^3}{\cos 2x - 1}.$ |
| 9. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^3 - 1};$ | б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x}{1 + 3x + 4x^2};$ | в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}.$ |
| 10. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^3}{x^2 + x - 2};$ | б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{3x - x^2};$ | в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+16} - 4}{\operatorname{tg} 3x}.$ |

Образец решения

1. Найти указанные пределы.

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 5x + 6}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5x}{1 + 2x - 3x^2}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sqrt{x+16} - 4}.$$

Решение.

а) Числитель и знаменатель дроби представляют собой непрерывные функции, обращающиеся в нуль в точке $x = -2$. Имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Раскладывая числитель и знаменатель на множители получим:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 5x + 6} \left(\frac{0}{0} \right) &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x-3} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 2x + 4)}{\lim_{x \rightarrow -2} (x-3)} = \frac{2^2 + 2 \cdot 2 + 4}{2-3} = \frac{12}{-1} = -12.\end{aligned}$$

б) Так как $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 5x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 2x - 3x^2) = \infty$, то здесь имеет место неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$. Для её раскрытия разделим числитель и знаменатель почленно на x^2 (наивысшую степень x в данной дроби). Тогда

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5x}{1 + 2x - 3x^2} \left(\frac{\infty}{\infty} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{5x}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{2x}{x^2} - \frac{3x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{5}{x}}{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} - 3} = \\ &= \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

в) Имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0} \right)$. Умножая числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное к знаменателю, можем записать равенства:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sqrt{x+16} - 4} \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+16} + 4) \operatorname{tg} 3x}{(x+16) - 16} = \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+16} + 4) \cdot \frac{\operatorname{tg} 3x}{x}.$$

Далее преобразуем полученное выражение так, чтобы можно было воспользоваться первым замечательным пределом $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$, а также

соотношениями:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} x\right) = f(a);$$

$$\lim_{x \rightarrow a} Cf(x) = C \lim_{x \rightarrow a} f(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x).$$

$$\frac{\operatorname{tg} 3x}{x} = \frac{\sin 3x}{x \cdot \cos 3x} = \frac{3 \sin 3x}{3x \cdot \cos 3x} = \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{3}{\cos 3x}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sqrt{x+16} - 4} &= \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+16} + 4) \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{3}{\cos 3x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+16} + 4) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{\cos 3x} = 8 \cdot 1 \cdot 3 = 24.\end{aligned}$$

ПЗ № 5. Составление уравнения касательной и нормали.

Задание 1 Найти производные данных функций.

Вариант	
1,11,21	а) $y = 5x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \sin x$; б) $y = 2^x \cos x$; в) $y = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$;

2,12,22	a) $y = x^4 + \frac{3}{x^3} + \arccos x$; б) $y = (x^2 - 1)e^x$; в) $y = \frac{4^x}{x+1}$;
3,13,23	a) $y = 4x^2 + \sqrt[3]{x} - \cos x$; б) $y = (1 - x^2)\arcsin x$; в) $y = \frac{e^x}{x^2 - 4x + 3}$;
4,14,24	a) $y = 3x^2 - \arcsin x + \frac{1}{x^5}$; б) $y = (x^3 + 3x)\ln x$; в) $y = \frac{\ln x}{x^2}$;
5,15,25	a) $y = 5x^2 - \frac{1}{\sqrt[4]{x}} - e^x$; б) $y = (x^3 + 3)\operatorname{arctg} x$; в) $y = \frac{3^x}{x^2 - 1}$;
6,16,26	a) $y = 4x^5 + \sqrt[5]{x} + 2\sin x$; б) $y = (e^x - 2)(1 - x^3)$; в) $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2}$;
7,17,27	a) $y = x^3 + \frac{4}{x^4} - e^x$; б) $y = (\ln x - x^2)(1 - x^3)$; в) $y = \frac{e^x}{x^2 - 4x + 3}$;
8,18,28	a) $y = x - \frac{4}{x^2} + \sqrt[3]{x^2}$; б) $y = (x^3 - 3x)\ln x$; в) $y = \frac{\operatorname{tg} x}{x - 1}$;
9,19,29	a) $y = x^3 + \frac{1}{x^5} + \operatorname{tg} x$; б) $y = x^2 \operatorname{arctg} x$; в) $y = \frac{\sin x}{x - \cos x}$;
10,20,30	a) $y = 2x^3 + \frac{1}{x^4} + \ln x$; б) $y = (2 - x^3)\operatorname{ctg} x$; в) $y = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$;

Задание 2 Написать уравнение касательной в точке $M_0 (x_0, y_0)$ линии, заданной уравнением $y = f(x)$

Вариант	
1,11,21	$f(x) = \arcsin\left(\frac{\operatorname{tg} 2x}{2}\right); \quad x_0 = \frac{\pi}{3}.$
2,12,22	$f(x) = (2e^{x^2+2x-3} - 1)^3; \quad x_0 = 1.$
3,13,23	$f(x) = (\ln(\cos x) + 2x + 1)^2; \quad x_0 = 0.$
4,14,24	$f(x) = \sqrt{3}\operatorname{ctg}(\arccos x); \quad x_0 = \frac{1}{2}.$
5,15,25	$f(x) = (3e^{x^2-3x+2} - 2)^3; \quad x_0 = 1.$
6,16,26	$f(x) = \cos^2(\pi(2x + 3)) + 2x; \quad x_0 = 1.$
7,17,27	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}(\arcsin x); \quad x_0 = \frac{1}{2}.$
8,18,28	$f(x) = (\ln(2e^{x-3} - 1) + x - 5)^2; \quad x_0 = 3.$
9,19,29	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\operatorname{arctg} 2x); \quad x_0 = \frac{1}{2}.$
10,20,30	$f(x) = \sqrt{2}\cos\left(\operatorname{arctg} \frac{3x}{2}\right); \quad x_0 = \frac{2}{3}.$

Образец решения

1. Найдите производные функций:

a) $y = 5x^2 \sin x$; б) $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$; в) $y = \sin^2\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right).$

Решение. Вычислим производные заданных функций:

$$\begin{aligned} \text{а) } y' &= (5x^2 \sin x)' = (5x^2)' \sin x + (\sin x)' 5x^2 = \\ &= 10x \sin x + 5x^2 \cos x = 5x(2 \sin x + x \cos x). \end{aligned}$$

$$\text{б) } y' = \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \right)' = \frac{(\ln x)' \sqrt{x} - (\sqrt{x})' \ln x}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{1}{x} \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}};$$

в)

$$\begin{aligned} y' &= \left(\sin^2 \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \right)' = 2 \sin \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \left(\sin \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \right)' = 2 \sin \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \cos \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)' = \\ &= \sin \left(2 \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \right) \left(1 + (x^{-1/2})' \right) = \sin \left(2 \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \right) \left(1 - \frac{1}{2} x^{-3/2} \right). \end{aligned}$$

ПЗ№ 6. Применение производной к исследованию функции и для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах.

Задание 1

Исследовать данные функции методами дифференциального исчисления и построить их графики. При исследовании функции следует найти ее интервалы возрастания и убывания и точки экстремума, интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции.

Вариант	
1,11,21	$y = x^3 - 9x^2 + 24x - 13.$
2,12,22	$y = x^3 - 5x^2 + 9x + 1.$
3,13,23	$y = x^3 - 3x + 1.$
4,14,24	$y = x^3 + 6x^2 + 9x + 1.$
5,15,25	$y = x^3 - 12x^2 + 45x - 48.$
6,16,26	$y = x^3 - 9x^2 + 24x - 17.$
7,17,27	$y = x^3 + 3x^2 - 1$
8,18,28	$y = -x^3 + 3x^2 - 5.$
9,19,29	$y = -x^3 - 6x^2 - 9x - 3.$
10,20,30	$y = -x^3 + 12x^2 - 45x + 53.$

Образец решения

1. Исследовать функцию $y = x^2 - \frac{1}{x}$ методами дифференциального исчисления и постройте ее график.

Решение. Проведем исследование функции в соответствии с общей схемой.

1. Область определения $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
2. Функция имеет разрыв в точке $x=0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \left(x^2 - \frac{1}{x} \right) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \left(x^2 - \frac{1}{x} \right) = -\infty.$$

Имеем точку разрыва 2-го рода. Прямая $x=0$ – вертикальная асимптота графика функции.

3. Найдем значения x , при которых $y=0$:

$$x^2 - \frac{1}{x} = 0, \quad x^3 = 1, \quad x = 1.$$

График функции пересекает координатные оси в единственной точке (1; 0).

Определим интервалы знакопостоянства функции:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
y	+	Не существует	-	0	+

4. Функция не является ни четной, ни нечетной. Она непериодическая.

5. Найдем точки, для которых $y' = 0$.

$$y' = \left(x^2 - \frac{1}{x} \right)' = 2x + \frac{1}{x^2} = 0, \quad \text{отсюда } 2x^3 = -1, \quad x = \frac{-1}{\sqrt[3]{2}} \approx -0,794.$$

6. Определим интервалы возрастания и убывания функции:

x	$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt[3]{2}})$	$-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, 0)$	0	$(0, \infty)$
y'	-	0	+	Не существует	+
y		$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$		Не существует	

Определим точки экстремума:

$$y\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2-1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 0,794,$$

т.е. получили точку минимума.

7. Найдем критические точки 2-го рода:

$$y'' = \left(2x - \frac{1}{x^2} \right)' = 2 - 2\frac{1}{x^3} = 2\left(1 - \frac{1}{x^3}\right) = 0, \quad \text{отсюда } \frac{1}{x^3} = 1, \quad x = 1.$$

8. Определим интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
y''	+	Не существует	-	0	+
y	Выпуклость вниз	Не существует	Выпуклость вверх	0	Выпуклость вниз

Таким образом, точка $x=1$ является точкой перегиба.

9. Найдем наклонные асимптоты (если они существуют):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \frac{1}{x^2} \right) = \infty.$$

Так как предел не равен конечному числу, горизонтальные и наклонные асимптоты отсутствуют.

10. На основании проведенного анализа поведения функции построим ее график

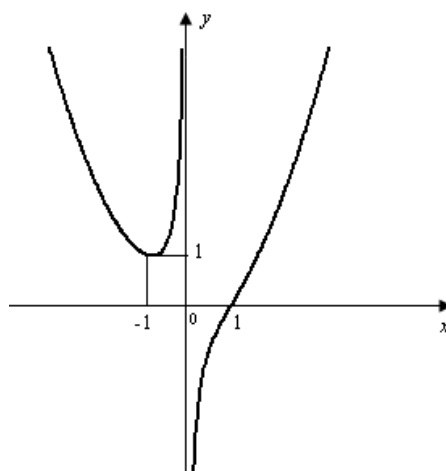


График функции $y = x^2 - \frac{1}{x}$

ПЗ № 7. Построение криволинейной трапеции. Применение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур и вычислению объёмов.

Задание

Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями с помощью определенного интеграла. Сделать чертеж.

Вариант		
1,11,21	$y = x^2 - 4x + 3,$	$y = x - 1.$
2,12,22	$y = x^2 + 2x,$	$y = x + 2.$
3,13,23	$y = x^2 + 4x + 3,$	$y = x + 3.$
4,14,24	$y = x^2 - 6x + 10,$	$y = x.$
5,15,25	$y = x^2 - 2x - 1,$	$y = x - 1.$
6,16,26	$y = x^2 + 6x + 8,$	$y = x + 4.$
7,17,27	$y = x^2 - 6x + 13,$	$y = x + 3.$
8,18,28	$y = x^2 + 8x + 15,$	$y = x + 5.$
9,19,29	$y = x^2,$	$y = x + 2.$
10,20,30	$y = x^2 - 1,$	$y = x + 1.$

Образец решения

Вычислите площади фигур, ограниченных указанными линиями:

а) $y = x^2 - 1, x = 0, y = 0, x = 2;$ б) $y = x^2, y = 2x.$

Решение. а) Построим графики указанных в условии функций (рис.2, а). Искомую площадь можно найти как сумму площадей фигур OAD и ABC :

$$S = S_{OAD} + S_{ABC}.$$

Так как фигура OAD расположена ниже оси Ox , значение интеграла

$$\int_0^1 (x^2 - 1) dx$$

будет отрицательным и площадь фигуры OAD определится как модуль этого интеграла. Тогда

$$\begin{aligned} S = S_{OAD} + S_{ABC} &= \left| \int_0^1 (x^2 - 1) dx \right| + \int_1^2 (x^2 - 1) dx = \left| \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_0^1 \right| + \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_1^2 = \\ &= \left| \left(\frac{1}{3} - 1 \right) - 0 \right| + \left(\frac{8}{3} - 2 \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = \left| -\frac{2}{3} \right| + \frac{4}{3} = 2; \end{aligned}$$

б) Графики функций, приведенных в условии, показаны на рис.2,б. Как следует из рисунка, площадь заштрихованной фигуры

$$S = \int_0^2 2x dx - \int_0^2 x^2 dx = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left(\frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \left(4 - \frac{8}{3} \right) - 0 = \frac{4}{3}.$$

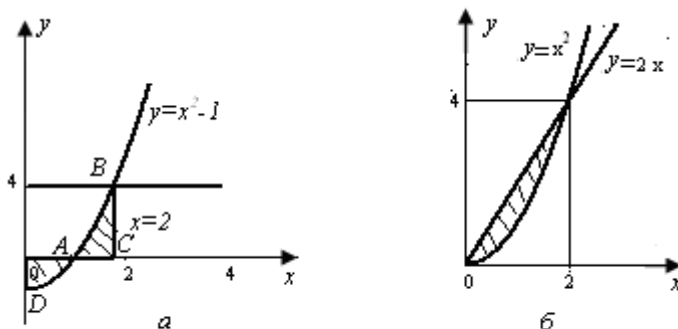


Рис. 2

ПЗ № 8. Составление статистического распределения выборки, построение полигона и гистограммы.

Закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей. Найти:

- неизвестную вероятность p ;
- математическое ожидание M , дисперсию D и среднее квадратическое отклонение σ данной случайной величины;
- функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

1.

X	-2	-1	0	1	2	3	4
p	0,01	p	0,23	0,28	0,19	0,11	0,06

2.

X	-2	-1	0	1	2	3	4
p	0,2	0,31	0,24	p	0,07	0,04	0,01

3.

X	-2	-1	0	1	2	3	4
p	0,04	0,08	0,32	0,31	0,15	0,08	p

4.

X	-2	-1	0	1	2	3	4
p	0,42	0,23	p	0,10	0,06	0,03	0,01

5.

X	-2	-1	0	1	2	3	4
p	p	0,29	0,12	0,15	0,21	0,16	0,04

6.

X	-2	-1	0	1	2	3	4
p	0,05	0,12	0,18	0,30	p	0,12	0,05

7.

X	-2	-1	0	1	2	3	4
p	0,16	0,25	0,25	0,16	0,10	p	0,03

8.

X	-2	-1	0	1	2	3	4
p	0,06	p	0,12	0,24	0,33	0,14	0,03

9.

X	-2	-1	0	1	2	3	4
p	0,02	0,38	0,30	p	0,08	0,04	0,02

10.

X	-2	-1	0	1	2	3	4
p	0,08	0,10	0,14	0,17	0,19	0,18	p

Образец решения

1. В планово-экономическом отделе предприятия имеется 4 компьютера. Вероятность работы одного компьютера без ремонта в течение месяца составляет 0,9. Пусть X - случайная величина, равная количеству компьютеров в отделе, проработавших в течение месяца без ремонта. Требуется найти закон распределения и функцию распределения случайной величины X , ее математическое ожидание и дисперсию.

Решение. Случайная величина X может принимать одно из пяти значений: 0, 1, 2, 3, 4, т.е. является дискретной случайной величиной. Вероятность появления каждого значения величины X вычислим по формуле Бернулли

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} /$$

Так, например, вероятность того, что $X = 0$, определится как

$$P(X = 0) = P_4(0) = C_4^0 \cdot 0,9^0 \cdot 0,1^4 = 1 \cdot 1 \cdot 0,0001 = 0,0001$$

Аналогичным образом вычисляем остальные вероятности, в результате чего получаем закон распределения случайной величины X :

X	0	1	2	3	4
p	0,0001	0,0036	0,0486	0,2916	0,6561

Построим функцию распределения случайной величины X :

$$\begin{array}{ll} \text{при } x \leq 0 & F(x) = 0; \\ \text{при } 0 < x \leq 1 & F(x) = 0,0001; \\ \text{при } 1 < x \leq 2 & F(x) = 0,0001 + 0,0036 = 0,0037; \\ \text{при } 2 < x \leq 3 & F(x) = 0,0037 + 0,0486 = 0,0523; \\ \text{при } 3 < x \leq 4 & F(x) = 0,0523 + 0,2916 = 0,3439; \\ \text{при } x > 4 & F(x) = 0,3439 + 0,6561 = 1. \end{array}$$

Таким образом, функция распределения $F(x)$ имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 0,0001 & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 0,0037 & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 0,0523 & \text{при } 2 < x \leq 3, \\ 0,3439 & \text{при } 3 < x \leq 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Математическое ожидание $M(X)$ определим по формуле $M(X) = \sum_i x_i p_i$.

Имеем:

$$M(X) = 0 \cdot 0,0001 + 1 \cdot 0,0036 + 2 \cdot 0,0486 + 3 \cdot 0,2916 + 4 \cdot 0,6561 = 3,6.$$

Для вычисления дисперсии найдем вначале $M(X^2)$:

$$M(X) = 0^2 \cdot 0,0001 + 1^2 \cdot 0,0036 + 2^2 \cdot 0,0486 + 3^2 \cdot 0,2916 + 4^2 \cdot 0,6561 = 13,32$$

Теперь вычислим дисперсию по формуле $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$. Имеем:

$$D(X) = 13,32 - 3,6^2 = 0,36.$$

Литература

Печатные издания

1. Математика: учебник / В. П. Григорьев, Т. Н. Сабурова. - М. : Академия, 2023. - 367 с.
2. Математика: учебник для использования в учебном процессе образовательных учреждений, реализующих программы по профессиям и специальностям среднего профессионального образования / И. Д. Пехлецкий. - 11-е изд., перераб. и доп. - Москва :Академия, 2023. – 312с

Электронные издания (электронные ресурсы)

1. Баврин И.И. Математика: учебник и практикум для СПО/ И.И. Баврин. – 2-е изд., перераб. и доп. М.: Издательство Юрайт, 2023. –616с. – 285с. – Серия: Профессиональное образование. Режим доступа: <https://biblio-online.ru/>
2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике.: учеб. пособие для СПО/ Н.В. Богомолов. – 11-е изд., перераб. и дополн. М.: Издательство Юрайт, 2023. – 495с. – Серия: Профессиональное образование. Режим доступа: <https://biblio-online.ru/>
3. Дорофеева А.В. Математика. Сборник задач: учеб.-практич. пособие для СПО/А.В. Дорофеева. – 2-е изд., перераб. и доп. М.: Издательство Юрайт, 2023. –176с. – Серия: Профессиональное образование. Режим доступа: <https://biblio-online.ru/>
4. Информационные, тренировочные и контрольные материалы. [Электронный ресурс] Режим доступа: [http:// www. fcior. edu. ru](http://www.fcior.edu.ru).
5. Единая коллекции цифровых образовательных ресурсов. [Электронный ресурс] Режим доступа: [http:// www. school-collection. edu. ru](http://www.school-collection.edu.ru).