РОСЖЕЛДОР
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Ростовский государственный университет путей сообщения»
(ФГБОУ ВО РГУПС)
Тихорецкий техникум железнодорожного транспорта
(ТТЖТ – филиал РГУПС)

---

**СУХОРУКИХ О.А.**

# МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ»

**для специальности 09.02.01 «Компьютерные системы и комплексы»**

Тихорецк

2023 г.

**РАССМОТРЕНА**
цикловой комиссией № 3
протокол №10 от «20» 06 2023 г.
Председатель ЦК ______Т.А. Бурлакова

**УТВЕРЖДАЮ**
Заместитель директора по УР
______________Н.Ю.Шитикова
«22» 06 2023 г.

Методические рекомендации по проведению практических занятий по дисциплине «Элементы высшей математики» разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины «Элементы высшей математики» для специальности 09.02.01 Компьютерные системы и комплексы

Организация-разработчик: Тихорецкий техникум железнодорожного транспорта – филиал Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Ростовский государственный университет путей сообщения» (ТТЖТ – филиал РГУПС)

Разработчик:
Сухоруких Ольга Александровна, преподаватель ТТЖТ - филиала РГУПС

## Содержание

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Большую роль в процессе формирования профессиональных компетенций играют математические компетенции и, в частности, технологии их формирования. Несмотря на то, что студенты в условиях лимитированного времени вынуждены изучать достаточно объёмный новый теоретический материал по математике, должны одновременно быть созданы необходимые условия для решения практических задач, в процессе чего наиболее продуктивно развиваются умения, формируются навыки и также такие личностные качества, как целеустремленность, ответственность, работоспособность, самостоятельность и т.п.

Учебной программой предусмотрен периодический контроль усвоения математических знаний, формирования необходимых умений и навыков в виде тематических контрольных работ. Их проведению должно предшествовать, наряду с практическими занятиями, самостоятельная работа студентов, включающая элементы изучения и закрепления теоретического материала, самопроверки и самоконтроля.

Выполнение студентами практических работ по дисциплине проводится с целью:

- закрепления полученных теоретических знаний по дисциплине;
- углубления теоретических знаний в соответствии с заданной темой;
- формирования умений решать практические задачи;
- развития самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования активных умственных действий студентов, связанных с поисками рациональных способов выполнения заданий;
- подготовки к экзамену.

Методические рекомендации выполняют функцию управления самостоятельной работой студента, поэтому каждое занятие имеет унифицированную структуру, включающую определение целей занятия, оснащения занятия, порядок выполнения работы, а также задания и контрольные вопросы для закрепления темы.

При выполнении практических работ основными методами обучения являются самостоятельная работа студентов под управлением преподавателя.

Студенты на практических занятиях в зависимости от формы и сложности заданий работают:

- индивидуально;
- в парах;
- в группах (4-6 чел.);
- всей группой.

По окончании работы студенты самостоятельно или с помощью преподавателя осуществляют взаимоконтроль, обсуждают результаты и подводят итоги работы.

Оценка преподавателем выполненной студентом работы осуществляется комплексно:

- по результатам выполнения заданий;
- по устной работе;
- по выполненной домашней работе;
- оформлению работы.

## ВВЕДЕНИЕ

Методические рекомендации по проведению практических занятий по дисциплине «Элементы высшей математики» для специальности 09.02.01 «Компьютерные системы и комплексы» разработаны в соответствии с программой учебной дисциплины «Элементы высшей математики».

По учебному плану на изучение учебной дисциплины студентами предусмотрено всего 108 часов, из них обязательной аудиторной учебной нагрузки обучающегося 64 часа, в том числе лекции, уроки 32ч., **практические занятия 32 ч.;** самостоятельной работы обучающегося 16 часов.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен **уметь**:

- Применять современный математический инструментарий для решения практических задач;
- применять методику построения и анализа математических моделей для оценки состояния явлений и процессов в части математического анализа, линейной алгебры.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен **знать**:

- Основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии .

Методические рекомендации содержат информацию о том, сколько и какие темы выносятся на практические занятия, основную и дополнительную литературу, вопросы для самопроверки.

Выполненная работа позволит приобрести не только знания, но и умения, навыки, а также поможет выработать свою методику подготовки, что очень важно в дальнейшем процессе обучения. Если потребуется консультация, то ее можно получить у преподавателя в соответствии с графиком консультаций.

**Тематический план практических занятий по дисциплине «Элементы высшей математики»**

| № п.п | Тема | Объём часов | Содержание практической работы | Деятельность студента | Форма контроля |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | **Тема 1.1. Матрицы и определители** | **4** | Действия над матрицами.<br>Решение систем линейных уравнений по правилу Крамера. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса. | Проработка конспектов занятий, учебных изданий и дополнительной литературы., решение практических заданий. | текущий контроль: устный и письменный опрос |
| **2** | **Тема 1.2. Системы линейных** | **4** | Решение систем линейных уравнений .<br>Применение различных методов решения систем линейных уравнений . | Проработка конспектов занятий, учебных изданий и дополнительной литературы., решение практических заданий. | текущий контроль: устный и письменный опрос |
| **3** | **Тема 1.3. Комплексные числа** | **2** | Действия над комплексными числами | Проработка конспектов занятий, учебных изданий и дополнительной литературы., решение практических заданий. | текущий контроль: устный и письменный опрос |
| **4** | **Тема 1.4. Элементы аналитической геометрии** | **6** | Выполнение действий с векторами<br>Нахождение уравнения прямой на плоскости.<br>Задание определения параметров кривых второго порядка на плоскости. | Проработка конспектов занятий, учебных изданий и дополнительной литературы., решение практических заданий. | текущий контроль: устный и письменный опрос |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **5** | **Тема 2.1. Пределы и непрерывность** | **2** | Вычисление пределов функций | Проработка конспектов занятий, учебных изданий и дополнительной литературы., решение практических заданий. | текущий контроль: устный и письменный опрос |
| **6** | **Тема 2.2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной** | **4** | Вычисление производных<br>Исследование функций с помощью производных | Проработка конспектов занятий, учебных изданий и дополнительной литературы., решение практических заданий. | текущий контроль: устный и письменный опрос |
| **7** | **Тема 2.3. Дифференциальные уравнения** | **4** | Решение дифференциальных уравнений | Проработка конспектов занятий, учебных изданий и дополнительной литературы., решение практических заданий. | текущий контроль: устный и письменный опрос |
| **8** | **Тема 2.4. Интегральное исчисление функций одной переменной** | **8** | Нахождение неопределенных интегралов.<br>Вычисление определенных интегралов.<br>Решение практических задач с применением свойств интегралов. | Проработка конспектов занятий, учебных изданий и дополнительной литературы., решение практических заданий. | текущий контроль: устный и письменный опрос |

## *СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ*

### Тема 1.Элементы линейной алгебры.

### *Теоретический материал по теме «Матрица»*

***Определение***. Матрицей называется прямоугольная таблица чисел.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Обозначения: А – матрица, $i$ – - элемент матрицы, $j$ – номер строки, в которой стоит данный элемент, номер соответствующего столбца; m – число строк матрицы, n – число ее столбцов.

Матрица называется квадратной, если m = n. Число n в этом случае называют порядком квадратной матрицы.

#### *Операции над матрицами*

***Суммой*** двух матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ одинаковых размеров называется матрица C=(cij) , обозначается C=A+B, тех же размеров, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 \\ -2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

***Произведением*** матрицы $A=(a_{ij})_{m \times n}$ на число k называется матрица того же размера, что и матрица А, элементы которой равны произведениям соответствующих элементов матрицы А на число k .

Пример.

$$3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 15 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

***Произведением*** матрицы $A_{m \times k} = (a_{ij})$ на матрицу $B_{k \times p} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m \times p} = (c_{ij})$, такая, что:

$$c_y = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj}.$$

Произведение обозначается АВ. Из определения следует, что элемент матрицы А.В, стоящий в i-й строке и j-м столбце, равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы А на соответствующие элементы j-го столбца матрицы В.

Пример. Найти произведение матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ на матрицу $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2+4\cdot 1 & 3\cdot 2+4\cdot 2 \\ 2\cdot 2+3\cdot 1 & 2\cdot 2+3\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$$

**УПРАЖНЕНИЯ**

1. Вычислить линейные комбинации матриц 2А + 3В - С, если
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 18 & -8 \end{pmatrix}.$$

2. Для матриц А и В найдите А+В, А – В, 3А, АВ, если $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$.

3.Найти произведение матриц:

*а)* $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

*б)* $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

*в)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

***Теоретический материал по теме «Определители»***

Каждой квадратной матрице можно поставить в соответствие число, определяемое единственным образом с использованием всех элементов матрицы. Это число называется определителем.

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

***Определение***: Определителем второго порядка называется число, полученное с помощью элементов квадратной матрицы 2-го порядка следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Определение. Определителем 3-го порядка называется выражение

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Пример. Вычислить $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

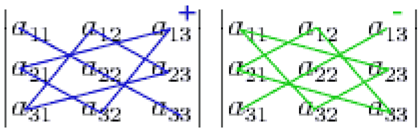
$$D = 1\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot 3 + 2\cdot 5 + 2(3\cdot 3 + 1\cdot 5) + 4(3(-2) + 1\cdot 2) = 28.$$

Определителем третьего порядка называется следующее выражение:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Определитель третьего порядка вычислить легко, если учесть следующее правило: со знаком плюс идут произведения троек чисел, расположенных на главной диагонали матрицы, и в вершинах треугольников с основанием параллельным этой диагонали и вершиной противоположного угла матрицы. Со знаком минус идут тройки из второй диагонали и из треугольников, построенных относительно этой диагонали. Следующая схема демонстрирует это правило, называемое правилом треугольников. В схеме синим (слева) отмечены элементы, чьи произведения идут со знаком плюс, а зеленым (справа) - со знаком минус.



$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot 9 + 2\cdot 6\cdot 7 + 3\cdot 4\cdot 8 - 3\cdot 5\cdot 7 - 2\cdot 4\cdot 9 - 1\cdot 6\cdot 8 =$$

$$= 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 0.$$

## УПРАЖНЕНИЯ

1. Вычислить определители второго порядка:

1) $\begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 8 & -7 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -10 & 7 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 8 & -10 \end{vmatrix}$ 4) $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}$ 5) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}$

6) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}$ 7) $\begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 8 & -7 \end{vmatrix}$ 8) $\begin{vmatrix} a & -a \\ b & b \end{vmatrix}$ 9) $\begin{vmatrix} 16 & 15 \\ -22 & 5 \end{vmatrix}$ 10) $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$

2. Вычислить определители третьего порядка:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 8 \\ 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 10 & 9 \end{vmatrix}$ 5) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 6 & 9 & -2 \\ 10 & 3 & -3 \end{vmatrix}$ 6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 3 & -1 & -6 \\ 2 & 3 & 9 \end{vmatrix}$

***Решение систем уравнений с помощью определителей***

*алгоритм решения систем линейных алгебраических уравнений методом Краммера.*

Решить систему уравнений $\begin{cases} 5x - 2y - 2z = 3 \\ 3x + 2y + z = 3 \\ x + y - z = -2 \end{cases}$

1. Вычисляем определитель основной матрицы системы $\Delta \begin{vmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$=5\cdot 2\cdot(-1)+3\cdot 1\cdot(-2)+(-2)\cdot 1\cdot 1-(-2)\cdot 2\cdot 1-(-2)\cdot 3\cdot(-1)-1\cdot 1\cdot 5=-10-6-2+4-6-5=-25$

2. Находим определители $\Delta x$; $\Delta y$; $\Delta z$, соответственно подставляя в столбцах вместо переменных значения свободных коэффициентов.

$\Delta x = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -25$ $\Delta y = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$=25 $\Delta z = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$=-50

3.Вычисляем искомые неизвестные переменные по формулам:

$x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = \dfrac{-25}{-25} = 1;$

$y = \dfrac{\Delta y}{\Delta} = \dfrac{25}{-25} = -1;$

$z = \dfrac{\Delta z}{\Delta} = \dfrac{-50}{-25} = 2.$

Ответ: (1;-1;2)

## УПРАЖНЕНИЯ

Решите системы линейных уравнений методом Крамера:

Вариант 1

1) $\begin{cases} x+y-z=6, \\ 2x+3y+z=9, \\ x+2y+4z=-1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x-5y+z=-2, \\ 4x+3y-6z=1, \\ 2x+21y-15z=3. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x-5y+z=-2, \\ 4x+3y-6z=1, \\ 2x+21y-15z=8. \end{cases}$

Вариант 2

1) $\begin{cases} x-y-z=-2, \\ x+2y+z=3, \\ 2x+y-3z=7. \end{cases}$

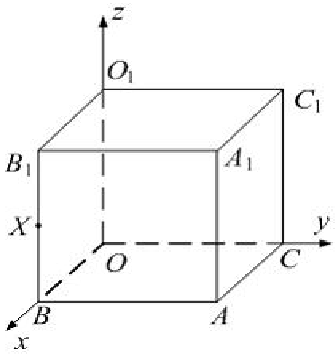
2) $\begin{cases} 2x+3y-z-1, \\ x-y+z=2, \\ 3x+2y=5. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x-5y+z=-2, \\ 4x+3y-6z=1, \\ 2x+21y-15z=3. \end{cases}$

## Тема 2. Элементы аналитической геометрии

### Тема 1. Координаты точек на плоскости и в пространстве

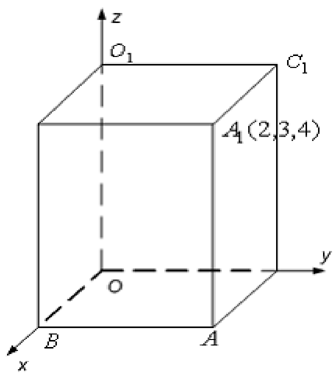
**1.** Ребро куба $ABOCA_1B_1O_1C_1$ равно 10.




Вершина куба $O$ совпадает с началом координат. Ребра, исходящие из этой вершины, лежат на осях координат, как изображено на рисунке. $X$ – середина ребра $BB_1$. Тогда координаты точки $X$ равны…

А) $(5; 10; 0)$ Б) $(10; 0; 5)$ В) $(10; 5; 0)$
Г) $(10; 0; 10)$

**2.** Дан прямоугольный параллелепипед.




Одна из его вершин совпадает с началом координат. Ребра, исходящие из вершины, лежат на осях координат. Вершина $A_1$ имеет координаты $(2; 3; 4)$. Тогда координаты точки $C_1$ равны…

А) $(2; 3; 0)$ Б) $(-2; 0; 4)$ В) $(0; 3; 4)$
Г) $(2; 0; 4)$

**Тема 2. Скалярное произведение векторов**

**1.** Пусть векторы заданы своими координатами: $\vec{a} = \{-2; 0; 3\}$ и $\vec{b} = \{3;\ -7; 1\}$ . В этом случае их скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$ равно…

А) $-3$ Б) $0$ В) $-6$ Г) $-10$

**2.** Пусть векторы заданы своими координатами: $\vec{a} = \{1; -4; 2\}$ и $\vec{b} = \{2;\ 0; 3\}$ . В этом случае их скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$ равно…

А) $5$ Б) $0$ В) $8$ Г) $4$

**3.** Пусть векторы заданы своими координатами: $\vec{a} = \{4; -2; 6\}$ и $\vec{b} = \{4;\ 2; 0\}$ . В этом случае их скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$ равно…

А) $18$ Б) $12$ В) $0$ Г) $20$

**Тема 3. Линейные операции над векторами**

**1.** Даны векторы $\vec{a} = \{1; 4; -1\}$ и $\vec{b} = \{-3; 6; 2\}$ . Тогда сумма координат вектора $2\vec{a} + \vec{b}$ равна…

А) $46$ Б) $15$ В) $0$ Г) $13$

**2.** Даны векторы $\vec{a} = \{2; 3; -2\}$ и $\vec{b} = \{-4; 1; 8\}$ . Тогда сумма координат вектора $3\vec{a} + \vec{b}$ равна…

А) $14$ Б) $0$ В) $29$ Г) $24$

**Тема 4. Уравнение прямой на плоскости**

**1.** Известно, что уравнение прямой, проходящей через две точки $A$ и $B$ , имеет вид $\frac{x-x_A}{x_A-x_B} = \frac{y-y_A}{y_A-y_B}$ . Тогда для точек $A(-2;\ -1)$ и $B(1; 2)$ уравнением прямой является…

А) $x - y + 1 = 0$ Б) $3x - y - 1 = 0$

В) $x - 3y - 5 = 0$ Г) $x - y - 1 = 0$

**2.** Известно, что уравнение прямой, проходящей через две точки $A$ и $B$ , имеет вид $\frac{x-x_A}{x_A-x_B} = \frac{y-y_A}{y_A-y_B}$ . Тогда для точек $A(3;\ 1)$ и $B(-1; -2)$ уравнением прямой является…

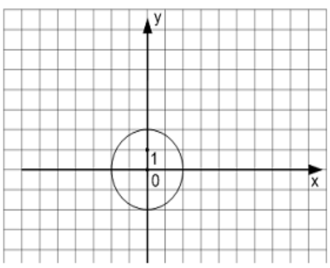
А) $4x - 3y - 5 = 0$ Б) $3x + 4y - 5 = 0$

В) $3x - 4y - 5 = 0$ Г) $3x - 4y + 5 = 0$

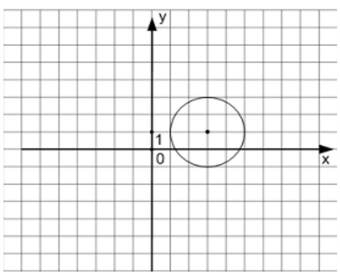
**Блок 2**

**1.** Установите соответствие между окружностями, изображенными на рисунке, и их уравнениями.

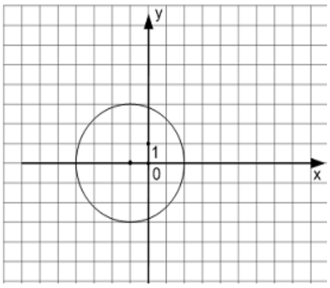
1.



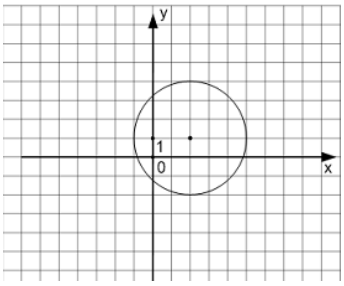

2.



3.



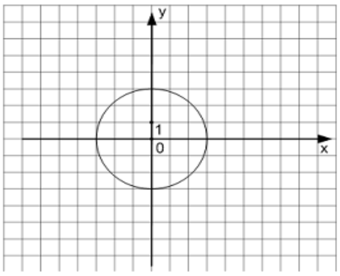

4.



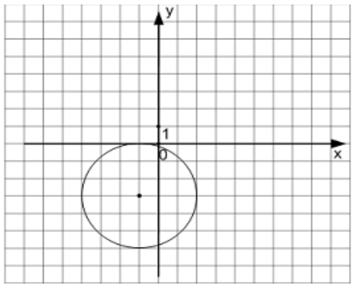

А) $(x+1)^2+y^2=9$ Б) $(x-2)^2+(y-1)^2=9$ В) $x^2+y^2=4$
Г) $(x-3)^2+(y-1)^2=4$ Д) $(x-3)^2+(y+11)^2=4$

**2.** Установите соответствие между окружностями, изображенными на рисунке, и их уравнениями.

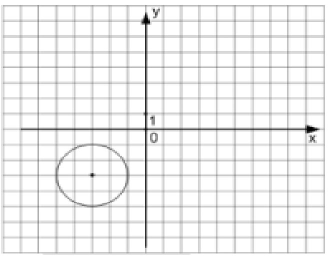
1.



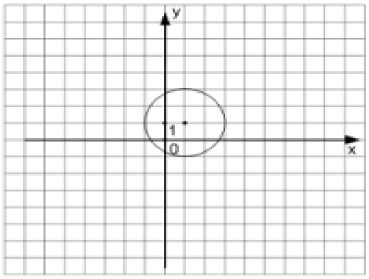

2.




3.



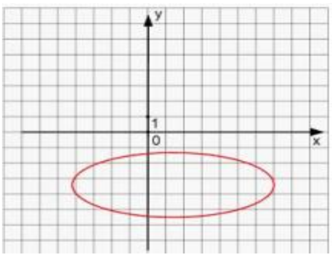

4.



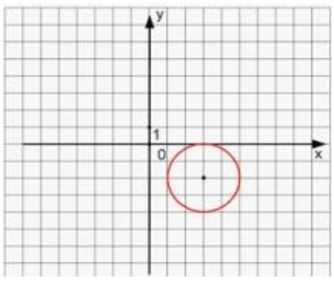

А) $(x+1)^2+(y-3)^2=9$ Б) $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ В) $x^2+y^2=9$
Г) $(x+3)^2+(y+3)^2=4$ Д) $(x+1)^2+(y+3)^2=9$

**3.** Установите соответствие между кривыми второго порядка, изображенными на рисунках, и их уравнениями.

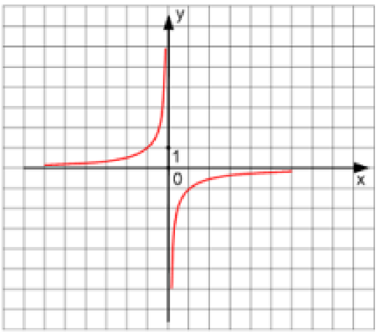
1.




2.



3.




А) эллипс Б) окружность

В) гипербола Г) парабола

## Тема 3. Комплексные числа

***Теоретический материал***

**1.Основные определения и соотношения для комплексных чисел.**

✓ Число $j = \sqrt{-1}$ называется *мнимой единицей*. Следовательно $\boldsymbol{j^2 = -1}$.

✓ Числа вида ***b j***, где b ∈ R называются *мнимыми* или *чисто мнимыми.*

*Например:* $2j,\ \sqrt{3}j,\ -\frac{1}{3}$ i.

✓ Числа вида $a$+$b\ j$, где $a, b$ ∈ R называются *комплексными.*

*Например:* $3 + 5j;\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j;\ \sqrt{3} - 2j$.

✓ Два комплексных числа $a + b\ j$ и $c + d\ j$ считаются *равными*, если равны их действительные части и коэффициенты при мнимой единице, т. е. $a = c$ и $b = d$ (понятия >, < для комплексных чисел нет).

✓ Комплексное число вида $0+0j$ называется *нулевым комплексным числом.*

✓ Два комплексных числа вида $a + b\ j$ и $a - b\ j$ называются *сопряжёнными.*

*Например*: $3 + 4j$ и $3 - 4j$.

✓ Два комплексных числа вида $a + b\ j$ и $-a - b\ j$ называются *противоположными.*

*Например*: $1 + 3j$ и $-1 - 3j$.

**3. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.**

Запись комплексного числа в виде $z = a + bj$ называется *алгебраической формой* записи комплексного числа.

Рассмотрим правила действия над комплексными числами в алгебраической форме.

*а)* ***Сложение и вычитание*** комплексного числа выполняются как сложение и вычитание многочленов, т.е. раскрываются скобки и приводятся подобные слагаемые.

*Примеры:*

$(1 + 4j) + (3 - 2j) = 1 + 4j + 3 - 2j = 4 + 2j;$

$(5 - j) - (9 - 2j) = 5 - j - 9 + 2j = -4 + j.$

б) ***Умножение*** комплексного числа в алгебраической форме выполняется как умножение многочленов с последующей заменой $j^2$ на $-1$ и приведением подобных слагаемых.

*Пример:* $(5 - 2j)(1 + j) = 5 - 2j + 5j - 2j^2 = 5 + 3j + 2 = 7 + 3j$

в) ***Деление.***

Чтобы выполнить деление комплексного числа нужно делимое и делитель умножить на число, сопряжённое делителю, выполнить действия и полученный в числителе результат почленно разделить на знаменатель.

*Пример:*

$$\frac{2-3j}{1+3j}=\frac{(2-3j)(1-3j)}{(1+3j)(1-3j)}=\frac{2-3j-6j+9j^2}{1^{2-(3j^2)}}=\frac{-7-9j}{1+9}=\frac{-7-9j}{10}=-0,7-0,9j$$

*Заметим*, что произведение $(a+bj)(a-bj)=a^2-b^2j^2=a^2+b^2$, поэтому в знаменателе результат будем находить сразу по этой формуле

$$\boxed{\boldsymbol{(a+bj)(a-bj)=a^2+b^2}}$$

*Пример:* $\frac{1+3j}{2-j}=\frac{(1+3j)(2+j)}{2^2+1^2}=\frac{2+6j+j+3j^2}{5}=\frac{-1+7j}{5}=-\frac{1}{5}+\frac{7}{5}j=-0{,}2+1{,}4j$

***Степени мнимой единицы.***

$\boldsymbol{j^1=j}$ $\qquad j^5=j^4*j=j$

$\boldsymbol{j^2=-1}$ $\qquad j^6=j^4*j^2=-1$

$\boldsymbol{j^3=-j}$ $\qquad j^7=j^4*j^3=-j$

$\boldsymbol{j^4=1}$ $\qquad j^8=j^4*j^4=1$ и т.д.

Таким образом, $(j^4)^k=1^k=1$.

*Чтобы подсчитать любую степень j нужно выделить из нее степень кратную 4 и остаток, а потом вычислить j в степени, равной остатку.*

*Примеры.* $j^{37}=j^{36}*j^1=j$; $\qquad j^{58}=j^{56}*j^2=-1$;

$j^{115}=j^{112}*j^3=-j$; $\qquad j^{40}=(j^4)^{10}=1$

## УПРАЖНЕНИЯ

Произвести сложение и вычитание комплексных чисел:

**1.** $(-2+3j)+(7-2j)$ **5.** $(3-2j)-(5+j)$ **9.** $(5-4j)+(-3j)$

**2.** $(6+2j)+(5+3j)$ **6.** $(4+2j)-(-3+2j)$ **10.** $(-8{,}5-j)+(-0{,}5+3j)$

Произвести умножение комплексных чисел:

**13.** $(2+3j)(5-7j)$ **17.** $(1-j)(1+j)$ **21.** $(-5-7j)(-4+j)$

**14.** $(6+4j)(5+2j)$ **18.** $(3+2j)(1+j)$ **22.** $(-1+2j)(3-j)$

*При выполнении умножения можно использовать формулы*

$$\boldsymbol{(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2} \qquad \boldsymbol{(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3}$$

*Примеры:* $(4-3j)^2=4^2-2\cdot 4\cdot 3j+(3j)^2=16-24j+9j^2=16-24j-9=7-24$

$(5-j)^3=5^3-3\cdot 5^2\cdot j+3\cdot 5\cdot j^2-j^3=125-75j+15j^2-j^3=$

$$=125-75j-15+j=110-74j$$

Выполнить действия:

**25.** $(2+3j)^2$ **28.** $(1-5j)^2$ **33.** $(2-5j)^2$

Выполнить действия:

**36.** $(3+2j)\cdot(3-2j)$; **39.** $(5+j)\cdot(5-3j)$; **42.** $(-1-j)\cdot(-1+j)$;

Выполнить деление:

**45.** $\frac{5j}{3+2j}$; **48.** $\frac{-2j}{5-j}$; **51.** $\frac{2-3j}{5+2j}$;

**46.** $\frac{3+2j}{5j}$; **49.** $\frac{6-7j}{j}$; **52.** $\frac{2+3j}{2-3j}$;

**47.** $\frac{5-7j}{5+7j}$; **50.** $\frac{1-j}{1+j}$; **53.** $\frac{1+j}{1-j}$.

Вычислите:

**54.** $j^{66}$; $j^{143}$; $j^{216}$; $j^{137}$. **57.** $(j^{133}+j^{115}+j^{200}+j^{142})\cdot(j^{17}+j^{136})$.

Выполните действия:

**60.** $\frac{(2+3j)-(5+7j)}{2+3j}$. **63.** $\frac{3+2j}{3-2j}+\frac{5+2j}{3+2j}$. **66.** $\frac{(4-3j)^2}{4+3j}-(1-j)(2+5j)$.

Решить квадратные уравнения:

*Пример:* $x^2-6x+13=0$.

*Решение.* Найдём дискриминант по формуле $D=b^2-4ac$.

$$D=6^2-4\cdot1\cdot13=-16;\quad \sqrt{D}=\sqrt{-16}=\sqrt{16\cdot(-1)}=\sqrt{16j^2}=4j.$$

$$x_{1,2}=\frac{6\pm4j}{2}=3\pm2j.$$

**63.** $x^2-4x+13=0$. **65.** $x^2+3x+4=0$. **67.** $3x^2+2x+4=0$.

**64.** $2{,}5x^2+x+1=0$. **66.** $4x^2-20x+26=0$. **68.** $9x^2+12x+29=0$.

Найдите $x$ и $y$ на основании равенства двух комплексных чисел.

*Пример:* $4-3xj=2y+5$.

*Решение.* Из равенства комплексных чисел следует, что $4=2y$ и $-3x=5$.

$y=2$ и $x=-\frac{5}{3}$

**69.** $7x+5j=1-10jy$. **70.** $(2x+y)-j=5+(y-x)j$.

**71.** $x+(3x-y)j=2-j$. **72.** $(1+2j)x+(3-5j)y=1-3j$.

**73.** .$(2-j)x+(1+j)y=5-j$ **.** **74.** $(3j-1)x+(2-3j)y=2-3j$.

**4. Геометрическое изображение комплексных чисел.**

Комплексное число $z=a+bj$ изображается на координатной плоскости точкой M(a;b) или вектором $\overrightarrow{OM}$, начало которого совпадает с началом координат, а конец – с точкой M(a;b). Сама координатная плоскость при этом называется комплексной плоскостью, ось абсцисс – действительной осью, ось ординат – мнимой осью.

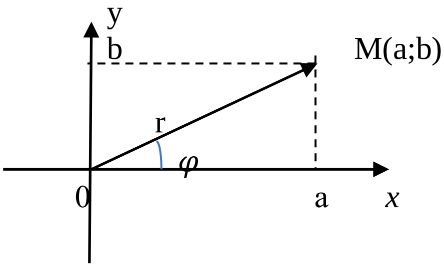



Рис. 1.

**75.** Изобразите на координатной плоскости числа: $z_1 = 5$; $z_2 = -3j$; $z_3 = 3 + 2j$; $z_4 = 5 - 2j$; $z_5 = -3 + 2j$; $z_6 = -1 - 5j$.

**5. Модуль и аргумент комплексного числа.**

*Определение.* ***Модулем*** комплексного числа называется абсолютная величина вектора, соответствующего этому числу.

Модуль числа $z = a + bj$ обозначается $|z|$ или $|a + bj|$ или r.

На основании теоремы Пифагора (см. рис.1) получается формула

$$\mathbf{r} = \sqrt{\mathbf{a^2 + b^2}}$$

Например, комплексное число $z = 8 - 6j$ имеет модуль равный 10, так как $|z| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$.

*Определение.* ***Аргументом*** комплексного числа $z \neq 0$ называется величина угла между положительным направлением оси *Ox* и вектором, соответствующим этому числу (см. рис. 1).

Аргумент обозначается $\varphi$, $arg$ z или $arg\ (a + b\ j)$.

Аргумент комплексного числа $z = a + bj$ *определяется неоднозначно.*
Так, аргументами числа 5 являются следующие углы: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 2\pi$, $\varphi_3 = -2\pi$ и вообще каждый из углов $\varphi = 2\,\pi k$, $k \in Z$ (см. рис. 2)

Аргументами числа 3 j – следующие углы: $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$; $\varphi_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi$, $\varphi_3 = \frac{\pi}{2} - 2\pi$ (см. рис.2) и вообще каждый из углов $\varphi_k = \frac{\varphi}{2} + 2\pi k$ (см. рис. 2).

*Любые два аргумента комплексного числа отличаются друг от друга на слагаемое, кратное 2* $\pi$.

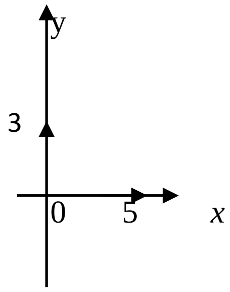
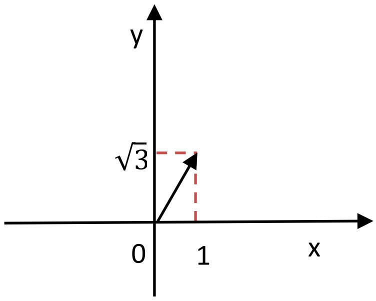



Рис 2

*Примеры:*

Найти модуль и аргумент комплексного числа.



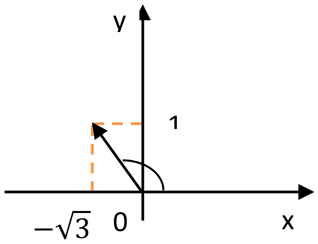

а) $z = 1 + \sqrt{3}j$

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3}$=2

$\operatorname{tg}\varphi \ = \left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{\sqrt{3}}{1}\right| = \sqrt{3}$

$\alpha$ = arctg$\sqrt{3}$=$60^0$

M $(1; \sqrt{3}) => \varphi \ = \alpha = 60^0$(1 четверть)



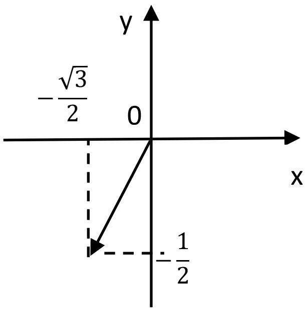

б) $z = -\sqrt{3} + j$

$r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2}$=2

$\operatorname{tg}\varphi$ $=\left|\frac{1}{-\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\alpha$ = arctg $\frac{1}{\sqrt{3}}$ = $30^0$, M $(-\sqrt{3}; 1) - 2$ четверть

$\varphi \ = 180^0 - \ \alpha \ = 180^0 - 30^0 = 150^0$




в) $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j$

$z = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$

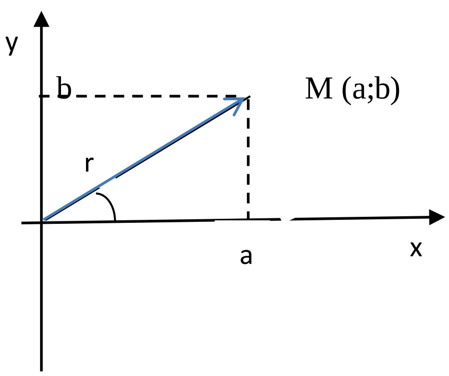
$\operatorname{tg}\alpha = \left|-\frac{\sqrt{3}}{2} * (-\frac{2}{1})\right| = \sqrt{3}$, $\alpha$ = arctg$\sqrt{3} = 60^0$

$\varphi = 180^0 + \alpha = 180^0 + 60^0 = 240^0$

или $\varphi = -\ (180^0 - \alpha) = -(180^0 - 60^0) = -120^0$

**6. Тригонометрическая форма комплексного числа.**

Пусть дано комплексное число $z = a + bj$. Из $\Delta$ OMA можно выразить действительные числа $a$ и $b$ через модуль r и аргумент $\varphi$ числа $z$ следующим образом: $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$



Таким образом, комплексное число можно записать в виде $z = r(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)$, где r – модуль комплексного числа, $\varphi$ - один из его аргументов.

Представление комплексного числа z в виде **z= $\mathbf{r}\,(\cos\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{j}\sin\boldsymbol{\varphi})$** называется **тригонометрической формой** записи комплексного числа.

**7. Правило перехода от алгебраической формы записи комплексного числа к тригонометрической**

*Для того чтобы перейти от алгебраической формы записи к тригонометрической нужно:*

*1. Найти модуль комплексного числа по формуле:* $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

*2. Найти один из аргументов комплексного числа, пользуясь правилом нахождения аргумента.*

*3. Записать комплексное число в тригонометрической форме.*

*Пример.* Записать число $z = -\sqrt{3} - j$ в тригонометрической форме.

*Решение:*

1. r = $\sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$
2. tg $\alpha = \left|\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right| = \sqrt{3}$, $\alpha$ = arctg$\sqrt{3} = 60^0$, $\varphi = 180^0 + 60^0 = 240^0$
3. z = $2(\cos 240^0 + j\sin 240^0)$

*Чтобы перейти от тригонометрической формы записи обратно к алгебраической форме нужно найти значения $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ при данном аргументе и умножить на модуль.*

*Например:* $z = 3(\cos 120° + j\sin 120°) = 3 * \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j\right) = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}j$

**8. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.**

1. *Умножение.*

Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)$

$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2)$

Тогда $z_1 * z_2 = r_1 * r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

Таким образом, *при умножении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются, а аргументы складываются.*

*Примеры:*

$z_1 = 2(\cos 40^0 + j\sin 40^0)$ $r_1 = 2$, $\varphi_1 = 40^0$

$z_2 = 5(\cos 20^0 + j\sin 20^0)$ $r_2 = 5$, $\varphi_2 = 20°$

$z_3 = 0{,}1(\cos 90^0 - j\sin 90^0)$ $r_3 = 0{,}1, \varphi_3 = -90$

Найти $z_1 * z_2 - ?$ $z_1 * z_2 * z_3 - ?$

*Решение.*

$z_1 * z_2 = 10(\cos 60^0 + j\sin 60^0)$

$z_1 * z_2 * z_3 = \cos(-30^0) + j\sin(-30^0) = \cos 30^0 - j\sin 30^0$

2. *Деление.*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Таким образом, *при делении комплексных чисел модуль частного равен частному модулей делимого и делителя, а аргумент – разности их аргументов.*

*Пример:*

$z_1 = 8\,(\cos 120^0 + j\sin 120^0)$ , $z_2 = 2(\cos 30^0 + j\sin 30^0)$

Тогда $\frac{z_1}{z_2} = \frac{8}{2}(\cos(120° - 30°) + j\sin(120° - 30°)) = 4(\cos 90^0 + j\sin 90^0)$

3. *Возведение в степень.*

$z^n = (r(\cos\varphi + j\sin\varphi))^n = r^n(\cos\varphi n + j\sin\varphi n)$ – это формула Муавра.

Таким образом, *при возведении комплексного числа в степень нужно его модуль возвести в данную степень, а аргумент умножить на показатель степени.*

*Пример:*

$z = (\cos 10^0 + j\sin 10^0)$

$z^5 = 2^5(\cos 10^0 * 5 + j\sin 10^0 * 5) = 32(\cos 50^0 + j\sin 50^0)$

4. *Извлечение корня из комплексного числа.*

$z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi+2\text{п}k}{n} + j\sin\frac{\varphi+2\text{п}k}{n})$

*Пример:*

$$\sqrt[4]{81(\cos 180^0 + j\sin 180^0)} = \sqrt[4]{81}\left(\cos\frac{180^0 + 360^0k}{4} + j\sin\frac{180^0 + 360^0k}{4}\right) =$$

$$= 3(\cos(45^0 + 90^0k) +\ j\sin(45^0 + 90^0k))$$

При k = 0, 1, 2, 3 получим

$z_0$=$3(\cos 45^0 + j\sin 45^0) = 3(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2})$= $\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}j$

$z_1$=$3(\cos(45^0 + 90^0) + j\sin(45^0 + 90^0)) = 3(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}j$

$z_2$=$3(\cos(225^0 + j\sin 225^0) = 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}j$

$z_3$=$3(\cos 315^0 + j\sin 315^0) = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} - j\frac{3\sqrt{2}}{2}$

## УПРАЖНЕНИЯ

Изобразить на плоскости числа:

**51.** $z = 5$;
**52.** $z = -3j$;
**53.** z = 3 + 2j;
**54.** z = 5 – 2j;
**55.** Z = – 3 + 2j;
**56.** z = – 1 – 5j.
**57.** $z = 3(\cos 40° + j\sin 40°)$
**58.** $z = 5(\cos 120° + j\sin 120°)$
**59.** $z = 2(\cos 330° + j\sin 330°)$

Записать в тригонометрической форме комплексные числа:

**57.** $z = 1 + j$.
**58.** $z = -2 + 2j$.
**59.** $z = \sqrt{3} + j$.
**60.** $z = -3 + 3j$.
**61.** $z = 2\sqrt{2} - 2j\sqrt{6}$;
**62.** $z = -\sqrt{3}j$.
**63.** $z = -10$.
**64.** $z = 6j$.

Найти произведение комплексных чисел $z_1$и $z_2$:

**65.** $z_1$=$2(\cos\frac{5\text{п}}{6} + j\sin\frac{5\text{п}}{6})$;  $z_2 = 0{,}4(\cos\frac{\text{п}}{2} + j\sin\frac{\text{п}}{2})$.

**66.** $z_1$= $(\cos 45^0 + j\sin 45^0)$; $z_2 = 3(\cos 180^0 + j\sin 180^0)$.

Найти частное комплексных чисел $z_1$ и $z_2$:

**68.** $z_1$=0,6$(\cos 120^0 + j\sin 120^0)$; $z_2 = 3(\cos 240^0 + j\sin 240^0)$.
**69.** $z_1$=3$(\cos 225^0 + j\sin 225^0)$; $z_2 = 5(\cos 45^0 + j\sin 45^0)$.

Найти произведения:
**73.** $2(\cos 60^0 + \mathrm{j}\sin 60^0) * 3(\cos 45^0 + \mathrm{j}\sin 45^0)$.

**74.** $\sqrt{2}(\cos 30^0 + \mathrm{j}\sin 30^0) * 2\sqrt{2}(\cos 60^0 + \mathrm{j}\sin 60^0)$.
**75.** $3(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi}{6}) * 2(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi}{3})$.
**76.** $\sqrt{3}(\cos 120^0 + j\sin 120^0) * \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos 150^0 + j\sin 150^0)$.

## Тема 5. Теория пределов. Непрерывность. Дифференциальное исчисление функций.

### *Теоретический материал*

Число А называют *пределом функции f ( x )* в точке *a* (или при *x,* стремящемся к *a*), если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует окрестность (окрестностью точки *a* называется любой промежуток, содержащий точку *a* внутри себя) точки *a*, такая, что в каждой точке этой окрестности, за исключением, быть может, самой точки *a*, функция *f(x)* определена и удовлетворяет неравенству

$| f ( x ) - A | < \varepsilon$.

Предел функции обозначается $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

Число *A* называется *правым (левым) пределом функции f ( x ) в точке a,* если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех *x*, удовлетворяющих условию

$a < x < a + \delta \qquad ( a - \delta < x < a )$,

выполняется неравенство

$| f ( x ) - A | < \varepsilon$.

Правый и левый пределы функции записываются соответственно как

$\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A$.

Функция *f* ( *x* ) называется *бесконечно малой при* $x \to a$, если

$\lim\limits_{x\to a} = 0$

Функция называется *бесконечно большой при* $x \to a$, если для любого числа $M > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $x \neq a$, удовлетворяющих условию

$| x - a | < \delta$,

выполняется условие

$| f(x) | > M$.

Данный факт записывается следующим образом: $\lim\limits_{x\to a} = \infty$

Если в некоторой окрестности точки $a$, за исключением, возможно, самой этой точки, определены функции $f(x)$ и $g(x)$ и существуют пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, то справедливы соотношения:

1) $\lim\limits_{x\to a} c = c$ ;2) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\pm g(x)\big)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)$ 3) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)g(x)\big)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)$

4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ ,если $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$ 5) $\lim\limits_{x\to a} cf(x)=c\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (следует из соотношения 3).

Приведем замечательные пределы:

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1;\quad 2)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\approx 2{,}71828$$

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x_o \in X$, если $f(x)$ задана в некоторой окрестности точки $x_o$, существует предел этой функции при $x\to x_0$ и он равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x$, удовлетворяющих неравенству

$| x - x_0 | < \delta$,

выполняется условие

$| f(x) - f(x_0) | < \varepsilon$.

Функция называется *непрерывной на промежутке*, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются *точками разрыва*. Функция имеет разрыв в точке $x_0$, если нарушается хотя бы одно из следующих требований:

1) существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=B$;

2) пределы $A$ и $B$ конечны;

3) $A = B = f(x_0)$.

*Производной функции* $y = f(x)$ по аргументу $x$ называется предел отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю. Производная обозначается $y'$, $y'_x$, $f'(x)$, $\dfrac{df(x)}{dx}$. Таким образом,

$$y' = y'_x = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Рассмотрим *геометрический смысл производной*. Пусть дана некоторая функция $f(x)$. Значение производной этой функции в точке $x_0$ равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции через точку $M(x_0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$:

$$f'(x_0) = k.$$

Уравнение касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$, в общем виде записывается следующим образом:

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0).$$

*Физический смысл производной* заключается в следующем: пусть зависимость пути, пройденного материальной точкой, описывается функцией $s = f(t)$. Производная этой функции в точке $t_0$ равна значению мгновенной скорости движения материальной точки в данный момент времени:

$$v(t_0) = s'(t_0).$$

Перечислим *правила дифференцирования*: $C' = 0$; $(u \pm v)' = u' + v'$; $(uv)' = u'v + v'u$; $\left(Cf\right)' = Cf'$; $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$.

Производная сложной функции вида $y = f(g(x))$ равна

$$y' = f'(g(x))g'(x).$$

Приведем *таблицу производных основных элементарных функций*:

1) $(kx+b)' = k$; 2) $(x^n)' = nx^{n-1}$; 3) $(x^2)' = 2x$;4) $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;6) $\cos' x = -\sin x$;

7) $tg'x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; 8) $ctg'x = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$; 9) $(a^x)' = a^x \ln a$;10) $(e^x)' = e^x$; 11) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$;
12) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;13) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 14) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

Произвольное приращение независимой переменной $x$ называется *дифференциалом независимой переменной* и обозначается через $\Delta x$ или $dx$ ($\Delta x = dx$).

**1.** Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке $x$ является произведение ее производной $f'(x)$ на дифференциал $dx$ аргумента $x$.

**2.** Согласно определению дифференциала функции имеем:
$dy = f'(x)$, или $dy = y' \cdot dx$, или $df(x) = f'(x)dx$.

**3.** Отсюда следует: $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$, или $y' = \dfrac{dy}{dx}$, или $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$,
т.е. производную от функции $y = f(x)$ можно представить как отношение дифференциала функции к дифференциалу аргумента.

## РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

**1.** Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-5x+6}{5x^2-5x-30}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-5x+6}{5x^2-5x-30}$; в) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{5x^2-5x-30}$;

г) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$; д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{tg5x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0} (1+2x)^{3/x}$.

Решение. а) При $x \to \infty$ имеем неопределенность вида $\infty/\infty$. Чтобы избавиться от нее, делим числитель и знаменатель на $x^2$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-5x+6}{5x^2-5x-30} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-5/x+6/x^2}{5-5/x-30/x^2} = \frac{1-0+0}{5-0-0} = 0{,}2;$$

б) При $x$=1 значения числителя и знаменателя дроби конечны, причем знаменатель не равен нулю. Следовательно, данная функция непрерывна в точке $x$=1. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-5x+6}{5x^2-5x-30} = \frac{1-5+6}{5-5-30} = \frac{2}{-30} = -\frac{1}{15};$$

в) Так как при $x$=3 имеем неопределенность вида $0/0$, то для вычисления предела разложим числитель и знаменатель дроби на множители:

$x^2 - 5x + 6 = 0$,

$D = 25 - 4\cdot 6 = 1$, $x_1 = \dfrac{5+1}{2} = 3$, $x_2 = \dfrac{5-1}{2} = 2$,

$x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$,

$5x^2 - 5x - 30 = 0$,

$\mathrm{D} = 25 + 4 \cdot 5 \cdot 25 = 625$, $\quad \mathrm{x}_1 = \dfrac{5+25}{2 \cdot 5} = 3$, $\quad x_2 = \dfrac{5-25}{2 \cdot 5} = -25$,

$5\mathrm{x}^2 - 5\mathrm{x} - 30 = 5(x-3)(x+2)$.

Тогда

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{5x^2-5x-30} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{5(x-3)(x+2)} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-2)}{5(x+2)} = \frac{3-2}{5(3+2)} = \frac{1}{25} = 0{,}04;$$

г) При $x$=2 имеем неопределенность вида $0/0$. Для того чтобы избавиться от нее, домножим числитель и знаменатель дроби на сопряженные им выражения:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = \lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)} = \lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+2}^{\,2}-2^2\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x}^{\,2}-\sqrt{2}^{\,2}\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2+2}+2} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

д) Воспользуемся первым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{tg 5x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cos 5x\frac{1}{5}\frac{5x}{\sin 5x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\cos 5x\cdot\frac{1}{5}\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sin 5x}} = 1\cdot 1\cdot\frac{1}{5}\cdot 1 = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

е) Воспользуемся вторым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{3/x} = \lim_{x\to 0}(1+2x)^{6/(2x)} = \lim_{2x\to 0}\left((1+2\mathrm{x})^{1/2x}\right)^6 = \mathrm{e}^6.$$

**2.** Найдите асимптоты кривой $y = 2x + \dfrac{1}{x}$.

Решение. Очевидно, что прямая $x$=0 является вертикальной асимптотой, так как

$$\lim_{x\to 0-0}\left(2x+\frac{1}{x}\right) = -\infty, \quad \lim_{x\to 0+0}\left(2x+\frac{1}{x}\right) = +\infty.$$

Выясним, имеет ли данная функция наклонные и горизонтальные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to 0\pm 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0\pm 0}\left(2+\frac{1}{x^2}\right) = 2,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(2x+\frac{1}{x}-2x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

Следовательно, кривая имеет наклонную асимптоту $y = 2x$ при $x \to \pm\infty$.

**3.** Найдите производные функций:

а) $y = 5x^2 \sin x$ ; б) $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ ; в) $y = \sin^2\left(x + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Решение. Вычислим производные заданных функций:

а) $y' = (5x^2 \sin x)' = (5x^2)' \sin x + (\sin x)' 5x^2 =$

$= 10x \sin x + 5x^2 \cos x = 5x(2\sin x + x\cos x)$ .

б) $y' = \left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)' = \dfrac{(\ln x)'\sqrt{x} - (\sqrt{x})' \ln x}{(\sqrt{x})^2} = \dfrac{\dfrac{1}{x}\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \ln x}{x} = \dfrac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$;

в)

$$y' = \left(\sin^2\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)' = 2\sin\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sin\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)' = 2\sin\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cos\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)' =$$

$$= \sin\left(2\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)\left(1 + (x^{-1/2})'\right) = \sin\left(2\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)\left(1 - \frac{1}{2}x^{-3/2}\right).$$

**4.** Исследовать функцию $y = x^2 - \dfrac{1}{x}$ методами дифференциального исчисления и постройте ее график.

Решение. Проведем исследование функции в соответствии с общей схемой.

**1.** Область определения $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

**2.** Функция имеет разрыв в точке $x$=0:

$$\lim_{x \to 0-0}\left(x^2 - \frac{1}{x}\right) = +\infty, \quad \lim_{x \to 0+0}\left(x^2 - \frac{1}{x}\right) = -\infty.$$

Имеем точку разрыва 2-го рода. Прямая $x$=0 – вертикальная асимптота графика функции.

**3.** Найдем значения $x$, при которых $y$=0:

$x^2 - \dfrac{1}{x} = 0$, $x^3 = 1$, $x = 1$.

График функции пересекает координатные оси в единственной точке (1; 0).

Определим интервалы знакопостоянства функции:

| $x$ | $(-\infty, 0)$ | 0 | $(0, 1)$ | 1 | $(1, \infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | + | Не существует | - | 0 | + |

**4.** Функция не является ни четной, ни нечетной. Она непериодическая.

**5.** Найдем точки, для которых $y' = 0$.

$y' = \left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)' = 2x + \dfrac{1}{x^2} = 0$, отсюда $2x^3 = -1$, $x = \dfrac{-1}{\sqrt[3]{2}} \approx -0{,}794$.

**6.** Определим интервалы возрастания и убывания функции:

| $x$ | $\left(-\infty, -1/\sqrt[3]{2}\right)$ | $-1/\sqrt[3]{2}$ | $\left(-1/\sqrt[3]{2}, 0\right)$ | 0 | $(0, \infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | – | 0 | + | Не существует | + |
| $y$ | ↘ | $1/\sqrt[3]{2}$ | ↗ | Не существует | ↗ |

Определим точки экстремума:

$y\left(-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 - \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{2-1}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 0{,}794$, т.е. получили точку минимума.

**7.** Найдем критические точки 2-го рода:

$y'' = \left(2x - \dfrac{1}{x^2}\right)' = 2 - 2\dfrac{1}{x^3} = 2\left(1 - \dfrac{1}{x^3}\right) = 0$, отсюда $\dfrac{1}{x^3} = 1$, $x = 1$.

**8.** Определим интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции:

| $x$ | $(-\infty, 0)$ | 0 | $(0,1)$ | 1 | $(1,0)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | + | Не существует | – | 0 | + |
| $y$ | Выпуклость вниз | Не существует | Выпуклость вверх | 0 | Выпуклость вниз |

Таким образом, точка $x$=1 является точкой перегиба.

**9.** Найдем наклонные асимптоты (если они существуют):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(x - \frac{1}{x^2}\right) = \infty .$$

Так как предел не равен конечному числу, горизонтальные и наклонные асимптоты отсутствуют.

**10.** На основании проведенного анализа поведения функции построим ее график

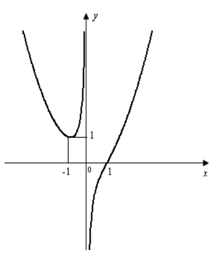



График функции $y = x^2 - \dfrac{1}{x}$

## УПРАЖНЕНИЯ

Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2+15x-140}{x^2+5x-36}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x^2+15x-140}{x^2+5x-36}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+15x-140}{x^2+5x-36}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{2x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

**2**. Найти производные функций:

а) $y=5x^2-\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\sin x$; б) $y=2^x\cos x$; в) $y=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$; г) $y=\ln\sin 5x$.

3. Найти производные функций:

1. $y=\dfrac{\left(x^3-1\right)^4}{\left(x^3+1\right)^3}$. 2. $y=\dfrac{1}{\left(x^3-1\right)^4}$.

1. $y=\dfrac{1}{(ax-b)^n}$. 4. $f(x)=\arcsin 3x$. Найти $f'(x),\ f'(0),\ f'(1/5)$.

1. $f(x)=arctgax$. Найти $f'(x),\ f'(0),\ f'(-1/a)$.

2. $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$. 7. $y=\arcsin\sqrt{x}$.

8. $y=\dfrac{\arccos x}{x}$. 9. $y=arctg\sqrt{x^2+2x}$.

10. $y=arctg\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$. 11. $f(x)=xar\sin\sqrt{1-x^2}$.

## Тема 6. Интегральное исчисление функции

### *Теоретический материал*

Функция $F(x)$, определенная на некотором множестве $D$, называется *первообразной для функции* $f(x)$, определенном на том же множестве, если функция $F(x)$ дифференцируема для любых $x\in D$, причем

$$F'(x)=f(x).$$

Можно показать, что если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на некотором множестве $D$, то и функция $F(x)+C$, где $C$ - константа, также будет первообразной для функции $f(x)$ на этом же множестве. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$, определенной на множестве $D$, называется *неопределенным интегралом от функции* $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Перечислим свойства неопределенного интеграла.

1. *Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, а его дифференциал – подынтегральному выражению*:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \quad d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

2. *Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен сумме этой функции и произвольной константы*:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

3. *Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла*:

$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, где $k = const \neq 0$.

4. *Неопределенный интеграл от суммы (разности) двух непрерывных функций равен сумме (разности) интегралов от этих функций*:

$$\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Приведем *таблицу неопределенных интегралов*:

**1)** $\int dx = x + C$;

**2)** $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$;

**3)** $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

**4)** $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$;

**5)** $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

**6)** $\int \cos x dx = \sin x + C$;

**7)** $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$;

**8)** $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$;

**9)** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$;

**10)** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

**11)** $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$;

**12)** $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C$

Существует ряд методов интегрирования функций. Под *непосредственным интегрированием* понимают метод, при котором с помощью тождественных преобразований подынтегральной функции и использовании свойств 3, 4 неопределенного интеграла удается свести искомый интеграл к одному или нескольким табличным интегралам. Непосредственное интегрирование возможно далеко не всегда, поэтому нередко приходится использовать и другие методы.

Метод подстановки заключается в том, что путем замены переменной $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$ получают интеграл вида

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt .$$

При этом стремятся подобрать такую замену переменной, чтобы полученный интеграл был более простым (например, вычислялся непосредственным интегрированием).

Еще одним методом интегрирования является *интегрирование функции по частям*, которое производится по формуле

$$\int udv = uv - \int vdu .$$

При вычислении интегралов методом интегрирования по частям главным является разумное разбиение подынтегрального выражения на множители $u$ и $dv$ .Общих установок по этому вопросу не имеется. Необходимо только соблюдать требование, чтобы $dx$ обязательно входило в состав $dv$ и чтобы через $dv$ была обозначена функция, интеграл которой можно легко найти. Для некоторых типов интегралов, вычисляемых методом интегрирования по частям, рекомендуются следующие обозначения.

**1.** В интегралах вида
$\int P(x)e^{ax}dx$, $\int P(x)\sin axdx$, $\int P(x)\cos axdx$,

где $P(x)$- многочлен относительно *x*, *a* - некоторое число, полагают $u = P(x)dx$, а все остальные сомножители за $dv$.

**2.** В интегралах вида
$\int P(x)\ln|ax|dx$, $\int P(x)\arcsin axdx$,

$\int P(x)\arccos axdx$, $\int P(x)arctgaxdx$,

$\int P(x)arcctgaxdx$

полагают $P(x)dx = dv$, а остальные сомножители – за $u$.

Рассмотрим некоторую функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[a;b]$. Разобьем отрезок $[a;b]$ на *n* частей точками $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ так, чтобы

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b .$$

Обозначим длину отрезка $\left[x_{k-1}; x_k\right]$ как $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. На каждом из таких отрезков выберем произвольным образом точку $\xi_k$ и рассмотрим сумму

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k .$$

Последнее выражение называют *интегральной суммой*. Если существует не зависящий от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на части и выбора точек $\xi_k$ предел интегральной суммы при $\Delta x \to 0$ (где $\Delta x = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n\}$ ), то его называют *определенным интегралом от функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a;b]$ и обозначают

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx .$$

Рассмотрим геометрический и физический смысл определенного интеграла. Будем называть *криволинейной трапецией* фигуру, ограниченную графиком функции $y = f(x)$,

прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью $Ox$ (рис.1). Площадь криволинейной трапеции вычисляется как значение определенного интеграла от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, т.е.

$$S = \int_a^b f(x)dx .$$

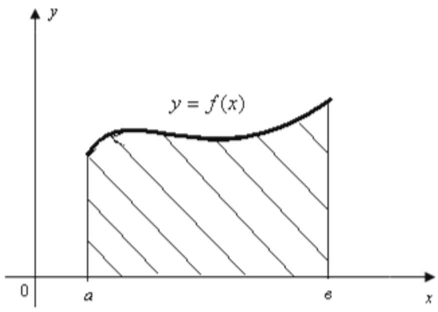



Рис.1 Криволинейная трапеция

Определенный интеграл может быть использован при решении ряда физических задач. Например, путь, пройденный телом за промежуток времени $[t_1; t_2]$ при скорости, изменяющейся с течением времени по закону $v = v(t)$, определится как

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt .$$

Для вычисления определенных интегралов используется *формула Ньютона – Лейбница*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(a)$ и $F(b)$ - значения любой из первообразных $F(x)+C$ при $x=a$ и при $x=b$ соответственно.

Перечислим *свойства определенного интеграла*.

1. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.
2. $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$, *где* $k = const$.
3. $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$.
4. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, *где* $a < c < b$.
5. *Если* $f(x) \geq 0$ *для всех* $x \in [a,b]$ и $a < b$, *то* $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$.
6. *Если* $f(x) \geq g(x)$ *для всех* $x \in [a,b]$, *то* $\int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b g(x)dx$.
7. *Если* $m$ *и* $M$ *– соответственно наименьшее и наибольшее значения функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a;b]$ и $a < b$, *то*

$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

8. *Для непрерывной на отрезке* $[a;b]$ *функции* $f(x)$ *существует такая точка* $c \in [a,b]$, *что*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Методы вычисления определенных интегралов аналогичны соответствующим методам для неопределенных интегралов, за исключением метода подстановки. При вычислении интеграла с помощью подстановки $x = \varphi(t)$ , $dx = \varphi'(t)dt$ пределы интегрирования *a* и *b*, соответствующие изменению переменной *x*, должны быть заменены на числа $\alpha$ и $\beta$, соответствующие изменению переменной *t*. Значения $\alpha$ и $\beta$ выражаются из соотношений $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. С учетом этого получаем:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

## РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

**1. Вычислите неопределенные интегралы:**

а) $\int\left(x^3 + \sqrt{2x+5} + \frac{1}{x^2}\right)dx$; б) $\int \frac{x^3+0{,}25}{x(x^3+1)}dx$; в) $\int x\sin x dx$.

Решение. а) Воспользуемся методом непосредственного интегрирования:

$$\int\left(x^3+\sqrt{2x+5}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\int x^3dx+\int\sqrt{2x+5}dx+\int\frac{1}{x^2}dx=\int x^3dx+\int(2x+5)^{1/2}dx+\int x^{-2}dx=$$

$$=\frac{x^4}{4}+\frac{1}{2}\frac{(2x+5)^{3/2}}{1{,}5}-x^{-1}+C=\frac{x^4}{4}+\frac{(2x+5)^{3/2}}{3}-\frac{1}{x}+C;$$

б) Произведем замену $x(x^3+1)=x^4+x=t$. Тогда $dt=(4x^3+1)dx=4(x^3+0{,}25)dx$ и

$$\int\frac{x^3+0{,}25}{x(x^3+1)}dx=\frac{1}{4}\int\frac{4(x^3+0{,}25)}{x(x^3+1)}dx=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{4}\ln|t|+C=\frac{1}{4}\ln\left|x^4+x\right|+C;$$

в) Воспользуемся методом интегрирования по частям. Для этого введем следующие обозначения:

$$u=x,\quad du=dx,\quad dv=\sin xdx,\quad v=\int\sin xdx=-\cos x.$$

Согласно формуле интегрирования по частям, получим:

$$\int x\sin xdx=-x\cos x-\int(-\cos x)dx=-x\cos x+\int\cos xdx=-x\cos x+\sin x+C.$$

2. **Вычислите неопределенный интеграл $\int\sin^4 xdx$. Полученный интеграл проверьте дифференцированием.**

Решение. После преобразования подынтегральной функции с использованием тригонометрических формул применим метод непосредственного интегрирования:

$$\int\sin^4 xdx=\int(\sin^2 x)^2dx=\int\frac{(1-\cos 2x)^2}{2^2}dx=\frac{1}{4}\int(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int dx-\frac{2}{4}\int\cos 2xdx+\frac{1}{4}\int\cos^2 2xdx=\frac{1}{4}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 2xdx+\frac{1}{4}\int\frac{1+\cos 4x}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 2xdx+\frac{1}{8}\int dx+\frac{1}{8}\int\cos 4xdx=\frac{x}{4}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{x}{8}+\frac{1}{32}\sin 4x+C=$$

$$=\frac{3x}{8}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$$

3. **Вычислить определенные интегралы:**

а) $\int_1^4(x^2+2\sqrt{x})dx$; б) $\int_4^8\frac{x+3}{x^2+6x}dx$; в) $\int_1^e\ln xdx$.

Решение. а) Применим метод непосредственного интегрирования:

$$\int_1^4 (x^2+2\sqrt{x})dx=\left(\frac{x^3}{3}+2\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}\right)\Bigg|_1^4=\left(\frac{4^3}{3}+2\cdot\frac{2}{3}\cdot 4^{3/2}\right)-\left(\frac{1^3}{3}+2\cdot\frac{2}{3}\cdot 1^{3/2}\right)=\frac{64}{3}+\frac{8}{3}-\frac{1}{3}-\frac{4}{3}=\frac{67}{3};$$

б) Воспользуемся методом подстановки: $x^2+6x=t$, $(2x+6)dx=dt$.

Найдем пределы интегрирования для переменной $t$:

$$x=4:\quad t=4^2+6\cdot 4=40,$$

$$x=8:\quad t=8^2+6\cdot 8=112.$$

Тогда имеем:

$$\int_4^8 \frac{x+3}{x^2+6x}dx=\frac{1}{2}\int_4^8\frac{(2x+6)}{x^2+6x}dx=\frac{1}{2}\int_{40}^{112}\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln t\Big|_{40}^{112}=\frac{1}{2}(\ln 112-\ln 40)=\frac{1}{2}\ln\frac{112}{40}=\frac{1}{2}\ln 2{,}8;$$

в) Для вычисления данного интеграла используем метод интегрирования по частям:

$$u=\ln x,\quad du=\frac{dx}{x},\quad dv=dx,\quad v=x.$$

Далее применим формулу $\int udv=uv-\int vdu$, получаем:

$$\int_1^e \ln x dx=x\ln x\Big|_1^e-\int_1^e x\frac{dx}{x}=x\ln x\Big|_1^e-x\Big|_1^e=(e\ln e-1\cdot\ln 1)-(e-1)=e-0-e+1=1.$$

**4. Вычислите площади фигур, ограниченных указанными линиями:**

а) $y=x^2-1$, $x=0$, $y=0$, $x=2$; б) $y=x^2$, $y=2x$.

Решение. а) Построим графики указанных в условии функций (рис.2, а). Искомую площадь можно найти как сумму площадей фигур *OAD* и *ABC*:

$$S=S_{OAD}+S_{ABC}.$$

Так как фигура *OAD* расположена ниже оси *Ox*, значение интеграла

$$\int_0^1 \left(x^2-1\right)dx$$

будет отрицательным и площадь фигуры *OAD* определится как модуль этого интеграла. Тогда

$$S=S_{OAD}+S_{ABC}=\left|\int_0^1\left(x^2-1\right)dx\right|+\int_1^2\left(x^2-1\right)dx=\left|\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Bigg|_0^1\right|+\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Bigg|_1^2=$$

$$= \left| \left( \frac{1}{3} - 1 \right) - 0 \right| + \left( \frac{8}{3} - 2 \right) - \left( \frac{1}{3} - 1 \right) = \left| -\frac{2}{3} \right| + \frac{4}{3} = 2;$$

б) Графики функций, приведенных в условии, показаны на рис.2,*б*. Как следует из рисунка, площадь заштрихованной фигуры

$$S = \int_0^2 2x dx - \int_0^2 x^2 dx = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left( \frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^2 = \left( 4 - \frac{8}{3} \right) - 0 = \frac{4}{3}.$$

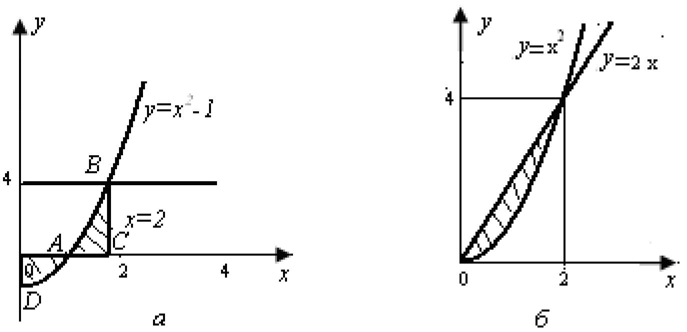



Рис. 2

## УПРАЖНЕНИЯ

**1.** Вычислить неопределенные интегралы и результаты проверить дифференцированием.

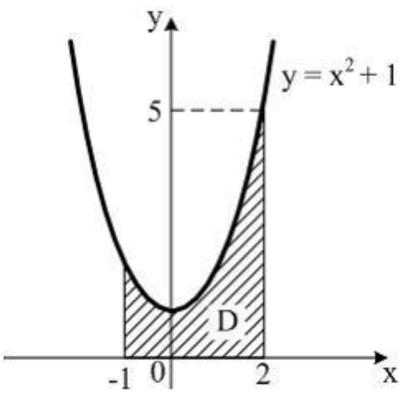
а) $\int \left( 2x - \frac{5}{x} + \sqrt[3]{x} \right) dx$; б) $\int \frac{x^2 dx}{3x^3 + 4}$; в) $\int x \sin 2x dx$.

**2.** Вычислить определенные интегралы.

а) $\int_2^4 \left( x^3 - \frac{1}{x} \right) dx$; б) $\int_0^5 \frac{x dx}{x^2 + 5}$; в) $\int_1^4 x \cdot e^x dx$.

**3.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 + 6x + 8$, $y = x + 4$. Сделать чертеж.

4. Площадь криволинейной трапеции $D$ определяется интегралом …



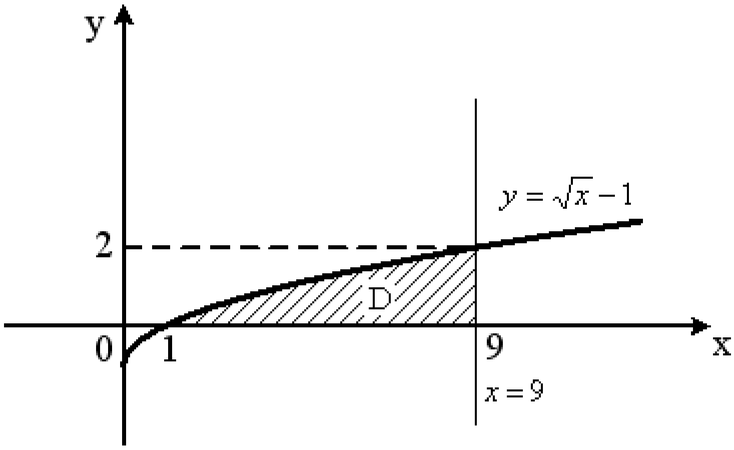

А) $\int_{-1}^{2} (x^2 + 1) dx$

Б) $\int_0^5 (x^2 + 1) dx$

В) $-\int_{-1}^{0} (x^2 + 1) dx + \int_0^2 (x^2 + 1) dx$

Г) $\int_0^2 (x^2 + 1) dx$

**5.** Площадь криволинейной трапеции *D* определяется интегралом …



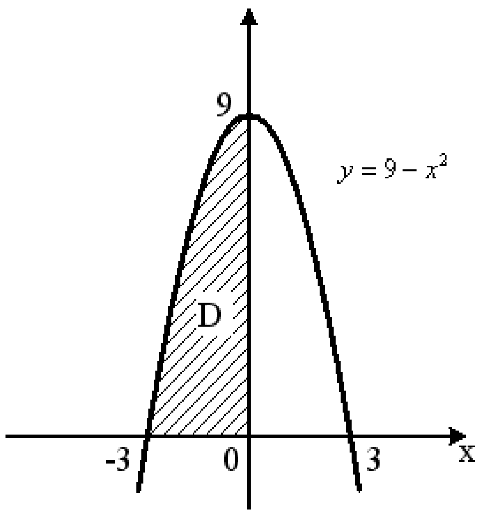

А) $\int_0^1 (\sqrt{x}-1)dx$

Б) $\int_0^2 (\sqrt{x}-1)dx$

В) $\int_0^9 (\sqrt{x}-1)dx$

Г) $\int_1^9 (\sqrt{x}-1)dx$

**6.** Площадь криволинейной трапеции *D* определяется интегралом …



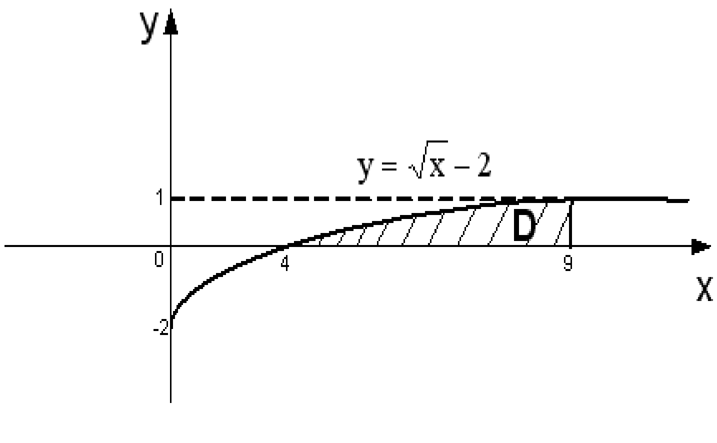

А) $\int_{-3}^0 x^2 dx$

Б) $\int_{-3}^3 (9-x^2)dx$

В) $\int_{-3}^0 (9-x^2)dx$

Г) $\int_0^9 (9-x^2)dx$

**7.** Площадь криволинейной трапеции *D* определяется интегралом …



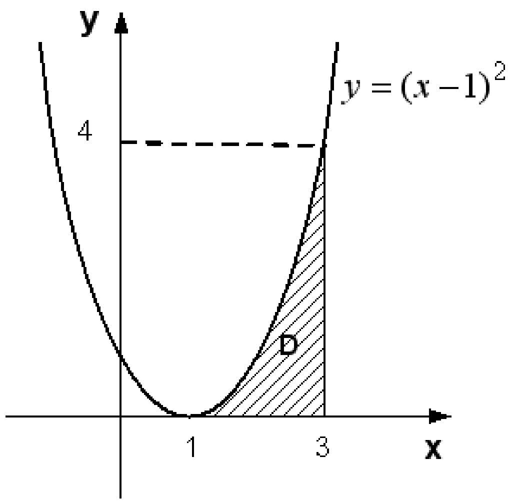

А) $\int_0^1 (\sqrt{x}-2)dx$

Б) $\int_4^9 (\sqrt{x}-2)dx$

В) $\int_0^9 (\sqrt{x}-2)dx$

Г) $\int_{-2}^1 (\sqrt{x}-2)dx$

**8.** Площадь криволинейной трапеции *D* определяется интегралом …




А) $\int_3^4 (x-1)^2\,dx$

Б) $\int_1^3 (x-1)^2\,dx$

В) $\int_0^3 (x-1)^2\,dx$

Г) $\int_0^4 (x-1)^2\,dx$

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**1**.Вычислить неопределенные интегралы:

1. а) $\int (3x^2 - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{4-x^2})dx$; б) $\int \frac{\sin x dx}{(1+3\cos x)^2}$;

2. а) $\int (\frac{1}{\sqrt{x}} + x^5 - \frac{3}{9+x^2})dx$; б) $\int \frac{dx}{(x-2)^7}$ ;

3. а) $\int (\frac{3}{4+x^2} - 2x + \cos 2x)dx$; б) $\int \frac{3x^2 dx}{2x^3+5}$;

4. а) $\int (2\sin 6x - \frac{1}{x} + e^{5x})dx$; б) $\int 2^{x^5} \cdot x^4 dx$;

5. а) $\int (x^4 + \frac{2}{\sin^2 x} - 3\cos 2x)dx$; б) $\int \sin^3 x \cdot \cos x dx$;

6. а) $\int (3x - \frac{1}{9+x^2} + e^{5x})dx$; б) $\int \cos^2 x \sin x dx$

**2**.Вычислить определенные интегралы:

1. а) $\int_{-1}^{2} 2dx$ б) $\int_{-2}^{0} \left(x^2+5x+6\right)dx$ в) $\int_{0}^{1} (2x^3+1)^4 \cdot x^2 dx$

2. а) $\int_{-2}^{2} (3-x)dx$ б) $\int_{-1}^{0} \left(x^2+4x+3\right)dx$ в) $\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{2\cdot\sqrt[3]{x^4-8}\cdot x^3}{3}dx$

3. а) $\int_{1}^{3}\left(x^2-2x\right)dx$ б) $\int_{-4}^{0}\left(x^2+7x+12\right)dx$ в) $\int_{0}^{1}(5x^3+2)^4\cdot x^2dx$

4. а) $\int_{-1}^{1}\left(2x-3x^2\right)dx$ б) $\int_{0}^{3}\left(9x^2+9x+11\right)dx$ в) $\int_{0}^{\pi/2}12^{\sin x}\cdot\cos x dx$

**3.** Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной заданными линиями (предварительно построить эту фигуру).

1. $y=0{,}5x^2-2x+3,\quad y=7-x$
2. $y=\left(x-2\right)^2,\quad y=4-x^2$
3. $y=x^2-3x+4,\quad y=x+1$
4. $y=x^2-2x+2,\quad y=2+4x-x^2$
5. $y=\frac{1}{2}x^2,\quad y=x+4$

## Тема 7. Обыкновенные дифференциальные уравнения

### *Теоретический материал*

**Определение:** Уравнение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию и ее производные или дифференциалы различных порядков, называется дифференциальным уравнением.

$$F(x,y,y',y'',...)=0\,.$$

**Определение:** Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

**Определение:** Функция $y=\varphi(x)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению, называется решением этого уравнения. Решение дифференциального уравнения, содержащее столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения, называется общим решением этого уравнения.

Для уравнения 1-го порядка: $y=\varphi(x, C)$

2-го порядка: $y=\varphi(x, C_1, C_2)$

**Определение:** Функции, получаемые из общего решения при различных числовых значениях произвольнх постоянных, называются частными решениями этого уравнения.

**Определение:** Задача на нахождение частного решения дифференциального уравнения при заданных начальных условиях называется задачей Коши.

### Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

**Определение:** Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными имеет вид

$$M_1(x)\cdot N_1(y))dx+M_2(x)\cdot N_2(y)dy=0.$$

1) Поделим все члены уравнения на $N_1(y) \cdot M_2(x)$, получим:

$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$, здесь переменные разделены.

2) Интегрируем обе части равенства:

$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C$,

после чего находим общее решение данного дифференциального уравнения в виде $C = y(x)$.

**Алгоритм решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными**

1. Выразить производную функции через дифференциалы *dx* и *dy*.
2. Члены с одинаковыми дифференциалами перенести в одну сторону равенства и вынести дифференциал за скобку.
3. Разделить переменные.
4. Проинтегрировать обе части равенства и найти общее решение.
5. Если заданы начальные условия, то найти частное решение.

**Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.**

**Определение.** Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

где $p$ и $q$ – постоянные величины, а $f(x)$ – непрерывная функция $x$.

Если правая часть уравнения равна нулю, т.е.

$$y'' + py' + qy = 0,$$

то оно называется однородным уравнением.

Для решения такого уравнения составляется характеристическое уравнение, заменив в уравнении $y'', y', y$ на $k^2, k, 1$ соответственно. Таким образом необходимо решить уравнение $k^2 + pk + q = 0.$

**Три случая решения уравнения.**

**1 случай.** Корни характеристического уравнения действительные и разные по величине. Тогда исходное уравнение будет иметь два линейно независимых частных решения:

$$y = e^{k_1 x}$$

$$y = e^{k_2 x}$$

А общее решение будет $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$

**2 случай.** Корни характеристического уравнения действительные и равные по величине. Тогда исходное уравнение будет иметь два линейно независимых частных решения:

$$y = e^{k_1 x}$$

$$y = xe^{k_2 x}$$

А общее решение будет $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_2 x}$

**3 случай.** Корни характеристического уравнения комплексные, а именно $k_1 = a + bi$ , $k_2 = a - bi$ . Тогда исходное уравнение будет иметь два линейно независимых частных решения:

$$y = e^{(a+bi)x}$$

$$y = e^{(a-bi)x}$$

А общее решение будет $y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$

Для практического использования **алгоритм решения** таких уравнений удобно оформить в виде таблицы:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Дифференциальное уравнение | $y'' + py' + qy = 0$ | | |
| Характеристическое уравнение | $k^2 + pk + q = 0$ | | |
| Дискриминант $D = p^2 - 4q$ | $D > 0$ | $D = 0$ | $D < 0$ |
| Корни характеристического уравнения | $k_1 \neq k_2$ | $k_1 = k_2$ | $k_1 = a + bi$<br>$k_1 = a + bi$ |
| Множества решений | $y = C_1 e^{kx_1} + C_2 e^{k_2 x}$ | $y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$ | $y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$ |

## РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

**Пример 1.** Найти общее решение дифференциального уравнения

$xdx + ydy = 0$

Решение.

Переменные здесь разделены. Интегрируя, получим

$xdx = -ydy = 0$

$\int xdx = -\int ydy$

$\frac{x^2}{2} + C = -\frac{y^2}{2}$

**Пример 2.** Найти общее решение дифференциального уравнения

$(y+1)dx = (x-1)dy$

Решение.

Разделим обе части уравнения на $(y+1)(x-1)$, получим

$$\frac{dx}{x-1} = \frac{dy}{y+1}$$

Теперь интегрируем

$$\int \frac{dx}{x-1} = \int \frac{dy}{y+1}$$

$$\ln(x-1) + C = \ln(y+1)$$

Так как $C$ произвольно, можно положить $C = \ln C$, получим

$$\ln(x-1) + \ln C = \ln(y+1)$$

$$\ln C(x-1) = \ln(y+1)$$

$$Cx - C = y + 1$$

$$y = Cx - C - 1$$

**Пример 3.** Найти общее решение дифференциального уравнения

$x(y^2-1)dx + y(x^2+1) = 0$

Решение.

Разделим все члены уравнения на произведение $(y^2-1)(x^2+1)$, получим

$$\frac{xdx}{x^2+1} + \frac{ydy}{y^2-1} = 0.$$

Теперь обе переменные разделены. Интегрируя, находим

$$\int \frac{xdx}{x^2+1} + \int \frac{ydy}{y^2-1} = C_1$$

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\ln(y^2-1) = \frac{1}{2}\ln C$$

Здесь произвольная постоянная $C_1$ заменена на $\frac{1}{2}\ln C$ (поскольку любое положительное или отрицательное число может быть представлено как натуральный логарифм другого положительного числа $|C|$).

Сокращая все члены равенства на $\frac{1}{2}$, получим

$\ln(x^2+1) + \ln(y^2-1) = \ln C$, откуда $(y^2-1)(x^2+1) = C$.

Это и есть общий интеграл или общее решение дифференциального уравнения.

**Пример 4.** Найти частное решение уравнения $2yy' = 1 - 3x^2$,

если $y_0 = 3$ при $x_0 = 1$.

Решение.

Это уравнение с разделенными переменными. Представим его в дифференциалах:

$$2y\frac{dy}{dx} = 1 - 3x^2$$

Отсюда $2ydy = (1-3x^2)dx$

Интегрируем обе части последнего равенства, найдем

$\int 2ydy = \int (1-3x^2)dx$ получаем $y^2 = x - x^3 + C$.

Подставив начальные значения $y_0 = 3$ , $x_0 = 1$ найдем $C$

$9 = 1 - 1 + C$, т.е. $C = 9$.

Искомый частный интеграл будет $y^2 = x - x^3 + 9$ .

**Пример 5.** Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 2y' - 8y = 0.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2 + 2k - 8 = 0$.

$D = p^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 36$.

Следовательно, характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня.

Определим их: $k_1 = -4$, $k_2 = 2$.

Находим частные решения данного дифференциального уравнения:

$y_1 = e^{-4x}, y_2 = e^{2x}$.

Общее решение данного уравнения имеет вид $y = C_1 e^{-4ч} + C_2 e^{2x}$.

Ответ: $y = C_1 e^{-4ч} + C_2 e^{2x}$.

**Пример 6.** Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Решение: Составим характеристическое уравнение

$$k^2 - 4k + 4 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 2$$

Корни характеристического уравнения – действительные равные, поэтому $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x}$ , следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид: $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$.

Ответ: $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$

**Пример 7.** Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 6y' + 13y = 0.$$

Решение: Составим характеристическое уравнение $k^2 - 6k + 13 = 0$

Оно имеет корни $k_1 = 3 + 2i$ и $k_2 = 3 - 2i$

Следовательно, частными решениями будут $\begin{matrix} y = e^{(3+2i)x} \\ y = e^{(3-2i)x} \end{matrix}$

Общим решением будет $y = e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

Ответ: $y = e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

## УПРАЖНЕНИЯ

**1.** Найти общее решение дифференциального уравнения

1. $\cos x \dfrac{dy}{dx} = (y+1)\sin x$
2. $yy' + x = 0$
3. $x^2 \dfrac{dy}{dx} = y$
4. $y' = \dfrac{y}{4x}$
5. $x\dfrac{dx}{y} - dy + \dfrac{dx}{4y} = 0$
6. $2y'\sqrt{x} = y$
7. $xy' = \dfrac{y}{\ln x}$
8. $(x+3)dy + (y-2)dx = 0$
9. $(x^2 - 1)dx + ydy = 0$
10. $2x^2dy - y^2dx = 0$

**2.** Найти общее решение дифференциального уравнения

1. $y'' - 4y' + 3y = 0$
2. $y'' - 6y' + 9y = 0$
3. $y'' + 2y' + 2y = 0$
4. $y'' + 3y' - 4y = 0$
5. $y'' - 9y' + 14y = 0$
6. $y'' - y = 0$
7. $y'' + 2y = 0$
8. $y'' - 14y' + 49y = 0$
9. $y'' - 6y' + 45y = 0$
10. $y'' + 4y = 0$

## Список рекомендуемой литературы

### Литература

***1 Основная:***

1) .Математика: учебник для СПО/ под общей ред. О.В. Татарникова.-М.: Издательство Юрайт, 2023. –450 с. Режим доступа: https://urait.ru/

2) Математика: учебник и практикум для СПО/ И.И. Баврин. – 2-е изд., перераб. и доп. М.: Издательство Юрайт, 2023. –568с. Режим доступа: https://urait.ru/

***2 Дополнительная:***

1) Практические занятия по математике. В 2 ч. : учеб. Пособие для СПО/ Н.В. Богомолов. – 11-е изд., перераб. и дополн. М.: Юрайт, 2022. –326 с.- Режим доступа: https://urait.ru/

2) Математика: учебник и практикум для СПО/ В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова – 8-е изд., перераб. и дополн. М.: Юрайт, 2022. – Режим доступа: https://urait.ru/