РОСЖЕЛДОР
Федеральное государственное бюджетное образовательное
Учреждение высшего образования
«Ростовский государственный университет путей сообщения»
(ФГБОУ ВО РГУПС)
Тихорецкий техникум железнодорожного транспорта
(ТТЖТ – филиал РГУПС)

ЛЯУВ Н.А.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА»

для специальности 23.02.01 «Организация перевозок и управление на транспорте (по видам)»

Тихорецк

2022г.

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора
по учебной работе
_____ Н.Ю. Шитикова
_____ 09 2022 г.

Методические рекомендации по организации практических занятий по дисциплине «Математика» разработаны на основе рабочей учебной программы дисциплины «Математика» для специальности 23.02.01Организация перевозок и управление на транспорте (по видам)

Организация-разработчик: Тихорецкий техникум железнодорожного транспорта – филиал Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Ростовский государственный университет путей сообщения» (ТТЖТ – филиал РГУПС)

Разработчик:
Ляув Наталья Александровна, преподаватель ТТЖТ - филиала РГУПС

Рекомендованы цикловой комиссией № 3 «Математические и общие естественнонаучные дисциплины».

Протокол заседания № 1 от 01.09.2022 г.

Содержание

Пояснительная записка	4
Введение	6
Тематический план практических занятий по дисциплине «Математика»	7
Содержание практических работ	9
Список рекомендуемой литературы	73

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Переход среднего профессионального образования России на уровневую систему предполагает использование компетентностного подхода в процессе обучения студентов, когда системно формируются знание, умение, навыки (ЗУН) обучающихся, а также их личностные качества, позволяющие компетентно использовать ЗУН в производственной деятельности, быть конкурентоспособным специалистом.

Большую роль в процессе формирования профессиональных компетенций играют математические компетенции и, в частности, технологии их формирования. Несмотря на то, что студенты в условиях лимитированного времени вынуждены изучать достаточно объёмный новый теоретический материал по математике, должны одновременно быть созданы необходимые условия для решения практических задач, в процессе чего наиболее продуктивно развиваются умения, формируются навыки и также такие личностные качества, как целеустремленность, ответственность, работоспособность, самостоятельность и т.п.

Учебной программой предусмотрен периодический контроль усвоения математических знаний, формирования необходимых умений и навыков в виде тематических контрольных работ. Их проведению должно предшествовать, наряду с практическими занятиями, самостоятельная работа студентов, включающая элементы изучения и закрепления теоретического материала, самопроверки и самоконтроля.

Выполнение студентами практических работ по дисциплине проводится с целью:

- закрепления полученных теоретических знаний по дисциплине;
- углубления теоретических знаний в соответствии с заданной темой;
- формирования умений решать практические задачи;
- развития самостоятельности, ответственности и организованности;

- формирования активных умственных действий студентов, связанных с поисками рациональных способов выполнения заданий;
- подготовки к экзамену.

Методические рекомендации выполняют функцию управления самостоятельной работой студента, поэтому каждое занятие имеет унифицированную структуру, включающую определение целей занятия, оснащения занятия, порядок выполнения работы, а также задания и контрольные вопросы для закрепления темы.

При выполнении практических работ основными методами обучения являются самостоятельная работа студентов под управлением преподавателя.

Студенты на практических занятиях в зависимости от формы и сложности заданий работают:

- индивидуально;
- в парах;
- в группах (4-6 чел.);
- всей группой.

По окончании работы студенты самостоятельно или с помощью преподавателя осуществляют взаимоконтроль, обсуждают результаты и подводят итоги работы.

Оценка преподавателем выполненной студентом работы осуществляется комплексно:

- по результатам выполнения заданий;
- по устной работе;
- по выполненной домашней работе;
- оформлению работы.

ВВЕДЕНИЕ

Методические рекомендации по организации практических занятий по дисциплине «Математика» для специальности 23.02.01Организация перевозок и управление на транспорте (по видам) разработаны в соответствии с рабочей учебной программой дисциплины «Математика».

По учебному плану на изучение учебной дисциплины студентами предусмотрено всего 94 часа, из них обязательной аудиторной учебной нагрузки обучающегося64 часа, в том числе лекции, уроки 32ч.,**практические занятия 32 ч.;** самостоятельной работы обучающегося 28 часов, консультации 2 часа.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен

уметь:

– применять математические методы дифференциального и интегрального исчисления для решения профессиональных задач;

– применять основные положения теории вероятностей и математической статистики в профессиональной деятельности;

– использовать приемы и методы математического синтеза и анализа в различных профессиональных ситуациях;

знать:

– основные понятия и методы математическо -логического синтеза и анализа логических устройств.

– решать прикладные электротехнические задачи методом комплексных чисел.

Методические рекомендации к практическим занятиям студентов содержат информацию о том, сколько и какие темы выносятся на практические занятия, основную и дополнительную литературу, вопросы для самопроверки. Выполненная работа позволит приобрести не только знания, но и умения, навыки, а также поможет выработать свою методику подготовки, что очень важно в дальнейшем процессе обучения. Если потребуется консультация, то ее можно получить у преподавателя в соответствии с графиком консультаций.

Тематический план практических занятий по дисциплине «Математика»

№ п.п	Тема	Объём часов	Содержание практических занятий	Деятельность студента	Форма контроля
1	**Теория чисел**	**4**	Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме. Геометрическая интерпретация комплексных чисел Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической и показательной формах. Решение профессиональных задач методом комплексных чисел.	Проработка конспектов занятий, учебных изданий и дополнительной литературы, решение практических заданий.	текущий контроль: устный и письменный опрос
2	**Основы дискретной математики**	**2**	Построение графа по условию ситуационных задач: в управлении инфраструктурами на транспорте.	Проработка конспектов занятий, учебных изданий и дополнительной литературы, решение практических заданий.	текущий контроль: устный и письменный опрос
3	**Математический анализ**	**12**	Вычисление производных сложных функций. Исследование функций. Решение прикладных задач с применением производной. Вычисление площадей и объемов с применением определенного интеграла. Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными.	Проработка конспектов занятий, учебных изданий и дополнительной литературы, решение практических заданий.	текущий контроль: устный и письменный опрос

			Определение сходимости числовых рядов по признаку Даламбера. Разложение функций в ряд Фурье. Расчет электрических цепей несинусоидальных периодических токов с применение рядов Фурье.		
4	**Основы теории вероятности и математическ ой статистики**	**6**	Решение задач на определение вероятности с использованием теорем сложения и умножения вероятностей. Построение рядов распределения случайной величины. Решение профессиональных задач на нахождение математического ожидания и дисперсии.	Проработка конспектов занятий, учебных изданий и дополнительной литературы, решение практических заданий.	текущий контроль: устный и письменный опрос
5	**Основные численные методы**	**8**	Вычисление интегралов по методам прямоугольников, трапеций и парабол. Решение задач на нахождение по таблично заданной функции (при ***n***= 2), функции заданной аналитически.	Проработка конспектов занятий, учебных изданий и дополнительной литературы, решение практических заданий.	текущий контроль: устный и письменный опрос

СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

1. Теория чисел

Теоретический материал

1.Основные определения и соотношения для комплексных чисел.

✓ Число $j = \sqrt{-1}$ называется *мнимой единицей*. Следовательно $\boldsymbol{j^2 = -1}$.

✓ Числа вида ***bj***, где b ∈R называются *мнимыми* или *чисто мнимыми.*
Например: $2j$, $\sqrt{3}j$, $-\frac{1}{3}i$.

✓ Числа вида $a+bj$, где a, b ∈R называются *комплексными.*
Например: $3 + 5j$; $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j$; $\sqrt{3} - 2j$.

✓ Два комплексных числа $a + bj$ и $c + dj$ считаются *равными*, если равны их действительные части и коэффициенты при мнимой единице, т. е. $a = c$ и $b = d$ (понятия >, < для комплексных чисел нет).

✓ Комплексное число вида $0+0j$ называется *нулевым комплекснымчислом.*

✓ Два комплексных числа вида $a + bj$ и $a - bj$ называются *сопряжёнными.*
Например: $3 + 4j$ и $3 - 4j$.

✓ Два комплексных числа вида $a + bj$ и $-a - bj$ называются *противоположными.*
Например: $1 + 3j$ и $-1 - 3j$.

2. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Запись комплексного числа в виде $z = a + bj$ называется *алгебраической формой*записикомплексного числа.

Рассмотрим правила действия над комплексными числами в алгебраической форме.

а) ***Сложение и вычитание*** комплексного числа выполняются как сложение и вычитание многочленов, т.е. раскрываются скобки и приводятся подобные слагаемые.

Примеры:

$(1+4j)+(3-2j)=1+4j+3-2j=4+2j;$

$(5-j)-(9-2j)=5-j-9+2j=-4+j.$

б) ***Умножение*** комплексного числа в алгебраической форме выполняется как умножение многочленов с последующей заменой j^2 на -1 и приведением подобных слагаемых.

Пример: $(5-2j)(1+j)=5-2j+5j-2j^2=5+3j+2=7+3j$

в) ***Деление.***

Чтобы выполнить деление комплексного числа нужно делимое и делитель умножить на число, сопряжённое делителю, выполнить действия и полученный в числителе результат почленно разделить на знаменатель.

Пример:

$\frac{2-3j}{1+3j}=\frac{(2-3j)(1-3j)}{(1+3j)(1-3j)}=\frac{2-3j-6j+9j^2}{1^{2-(3j^2)}}=\frac{-7-9j}{1+9}=\frac{-7-9j}{10}=-0,7-0,9j$

Заметим, что произведение $(a+bj)(a-bj)=a^2-b^2j^2=a^2+b^2$, поэтому в знаменателе результат будем находить сразу по этой формуле

$$\boxed{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{bj})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{bj})=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}$$

Пример: $\frac{1+3j}{2-j}=\frac{(1+3j)(2+j)}{2^2+1^2}=\frac{2+6j+j+3j^2}{5}=\frac{-1+7j}{5}=-\frac{1}{5}+\frac{7}{5}j=-0,2+1,4j$

Степени мнимой единицы.

$\boldsymbol{j^1}=\boldsymbol{j}j^5=j^4*j=j$

$\boldsymbol{j^2}=-\boldsymbol{1}j^6=j^4*j^2=-1$

$\boldsymbol{j^3}=-\boldsymbol{j}j^7=j^4*j^3=-j$

$\boldsymbol{j^4}=\boldsymbol{1}j^8=j^4*j^4=1$ и т.д.

Таким образом, $(j^4)^k=1^k=1.$

Чтобы подсчитать любую степень j нужно выделить из нее степень кратную 4 и остаток, а потом вычислить j в степени, равной остатку.

Примеры. $j^{37}=j^{36}*j^1=j;$ $j^{58}=j^{56}*j^2=-1;$

$j^{115}=j^{112}*j^3=-j;$ $j^{40}=(j^4)^{10}=1$

УПРАЖНЕНИЯ

Произвести сложение и вычитание комплексных чисел:

1. $(-2+3j)+(7-2j)$ **5.** $(3-2j)-(5+j)$ **9.** $(5-4j)+(-3j)$

2. $(6+2j)+(5+3j)$ **6.** $(4+2j)-(-3+2j)$ **10.** $(-8{,}5-j)+(-0{,}5+3j)$

3. $(3+5j)+(7-2j)$ **7.** $(-5+2j)-(5+2j)$ **11.** $7j-(4-5j)$

4. $(5-4j)+(6+2j)$ **8.** $(-3-5j)-(7-2j)$ **12.** $(2-5j)-(-6-j)$.

Произвести умножение комплексных чисел:

13. $(2+3j)(5-7j)$ **17.** $(1-j)(1+j)$ **21.** $(-5-7j)(-4+j)$

14. $(6+4j)(5+2j)$ **18.** $(3+2j)(1+j)$ **22.** $(-1+2j)(3-j)$

15. $(3-2j)(7-j)$ **19.** $(6+4j)\cdot 3j$ **23.** $(2{,}3+5j)(-5-4j)$

16. $(-2+3j)(3+5j)$ **20.** $(2-3j)(-5j)$ **24.** $(1-3j)(-2+4j)$.

При выполнении умножения можно использовать формулы

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$$

Примеры: $(4-3j)^2=4^2-2\cdot 4\cdot 3j+(3j)^2=16-24j+9j^2=16-24j-9=7-24j$

$(5-j)^3=5^3-3\cdot 5^2\cdot j+3\cdot 5\cdot j^2-j^3=125-75j+15j^2-j^3=$

$=125-75j-15+j=110-74j$

Выполнить действия:

25. $(2+3j)^2$ **28.** $(1-5j)^2$ **33.** $(2-5j)^2$

26. $(3-5j)^2$ **29.** $(6+j)^2$ **34.** $(-2+3j)^3$

27. $(3+5j)^2$ **30.** $(2-7j)^2$ **35.** $(1+5j)^3$

Выполнить действия:

36. $(3+2j)\cdot(3-2j)$; **39.** $(5+j)\cdot(5-3j)$; **42.** $(-1-j)\cdot(-1+j)$;

37. $(1-3j)\cdot(1+3j)$; **40.** $(7-6j)\cdot(7+6j)$; **43.** $(2-5j)\cdot(2+5j)$;

38. $(a+bj)\cdot(a-bj)$; **41.** $(3-4j)(3+4j)$; **44.** $(-4j)\cdot 4j$.

Выполнить деление:

45. $\frac{5j}{3+2j}$; **48.** $\frac{-2j}{5-j}$; **51.** $\frac{2-3j}{5+2j}$;

46. $\frac{3+2j}{5j}$; **49.** $\frac{6-7j}{j}$; **52.** $\frac{2+3j}{2-3j}$;

47. $\frac{5-7j}{5+7j}$; **50.** $\frac{1-j}{1+j}$; **53.** $\frac{1+j}{1-j}$.

Вычислите:

54. j^{66}; j^{143}; j^{216}; j^{137}. **57.** $(j^{133}+j^{115}+j^{200}+j^{142})\cdot(j^{17}+j^{136})$.

55. $j^{43}+j^{48}+j^{44}+j^{45}$. **58.** $j^{145}+j^{147}+j^{264}+\mathrm{j}117j^{117}$.

56. $(j^{36}+j^{17})\cdot j^{23}$. **59.** $(j^{64}+j^{17}+j^{13}+j^{82})\cdot(j^{72}-j^{34})$.

Выполните действия:

60. $\frac{(2+3j)-(5+7j)}{2+3j}$. **63.** $\frac{3+2j}{3-2j}+\frac{5+2j}{3+2j}$. **66.** $\frac{(4-3j)^2}{4+3j}-(1-j)(2+5j)$.

61. $\frac{6+2j}{3-7j}-\frac{2+3j}{2+5j}$. **64.** $\frac{6+2\mathrm{j}}{1-\mathrm{j}}-\mathrm{j}^{27}$. **67.** $\frac{6-3j}{2j}-(1-2j)^2$.

62. $\left(\frac{1+j^{12}}{1-j}\right)+\left(\frac{1+j^{12}}{1+j}\right)$. **65.** $\mathrm{j}^{123}+(1-\mathrm{j})^6-(1+\mathrm{j})^8$. **68.** $(2+5j)^2-7j^{27}+\frac{1-j}{5j}$.

Решить квадратные уравнения:

Пример: $x^2-6x+13=0$.

Решение. Найдём дискриминант по формуле $D=b^2-4ac$.

$D=6^2-4\cdot1\cdot13=-16$; $\sqrt{D}=\sqrt{-16}=\sqrt{16\cdot(-1)}=\sqrt{16j^2}=4j$.

$x_{1,2}=\frac{6\pm4j}{2}=3\pm2j$.

63. $x^2-4\mathrm{x}+13=0$. **65.** $\mathrm{x}^2+3\mathrm{x}+4=0$. **67.** $3x^2+2x+4=0$.

64. $2{,}5\mathrm{x}^2+\mathrm{x}+1=0$. **66.** $4\mathrm{x}^2-20\mathrm{x}+26=0$. **68.** $9x^2+12\mathrm{x}+29=0$.

Найдите x и y на основании равенства двух комплексных чисел.

Пример: $4-3xj=2y+5$.

Решение. Из равенства комплексных чисел следует, что $4=2y$ и $-3x=5$.

$y=2$ и $x=-\frac{5}{3}$

69. $7\mathrm{x}+5\mathrm{j}=1-10\mathrm{jy}$. **70.** $(2\mathrm{x}+\mathrm{y})-\mathrm{j}=5+(\mathrm{y}-\mathrm{x})\mathrm{j}$.

71. $\mathrm{x}+(3\mathrm{x}-\mathrm{y})\mathrm{j}=2-\mathrm{j}$. **72.** $(1+2\mathrm{j})\mathrm{x}+(3-5\mathrm{j})\mathrm{y}=1-3\mathrm{j}$.

73. $.(2-\mathrm{j})\mathrm{x}+(1+\mathrm{j})\mathrm{y}=5-\mathrm{j}$. **74.** $(3\mathrm{j}-1)\mathrm{x}+(2-3\mathrm{j})\mathrm{y}=2-3\mathrm{j}$.

3. Геометрическое изображение комплексных чисел.

Комплексное число $z = a + bj$ изображается на координатной плоскости точкой M(a;b)

или вектором $\overrightarrow{OM}$, начало которого совпадает с началом координат, а конец – с точкой M(a;b). Сама координатная плоскость при этом называется комплексной плоскостью, ось абсцисс – действительной осью, ось ординат – мнимой осью.

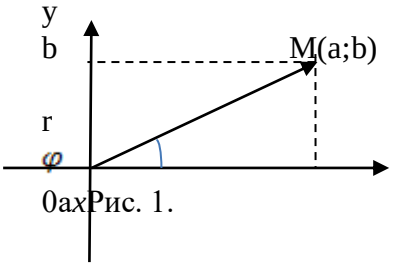


Рис. 1.

75.Изобразите на координатной плоскости числа: $z_1 = 5$; $z_2 = -3j$; $z_3 = 3 + 2j$; $z_4 = 5 - 2j$; $z_5 = -3 + 2j$; $z_6 = -1 - 5j$.

4. Модуль и аргумент комплексного числа.

*Определение.**Модулем*** комплексного числа называется абсолютная величина вектора, соответствующего этому числу.

Модуль числа $z = a + bj$обозначается $|z|$ или $|a + bj|$или r.

На основании теоремы Пифагора (см. рис.1) получается формула

$$\mathbf{r} = \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}$$

Например, комплексное число$z = 8 - 6j$имеет модуль равный 10, так как $|z| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10.$

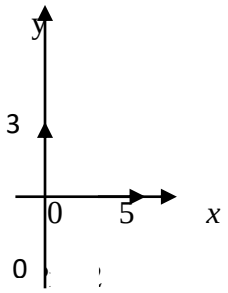
*Определение.**Аргументом*** комплексного числа $z \neq 0$ называется величина угла между положительным направлением оси *Ox* и вектором, соответствующим этому числу (см. рис. 1).

Аргумент обозначается φ, $arg z$ или $arg(a + bj)$.

Аргумент комплексного числа $z = a + bj$ *определяется неоднозначно.* Так, аргументами числа 5 являются следующие углы: $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 2\pi, \varphi_3 = -2\pi$ и вообще каждый из углов $\varphi = 2\pi k, k \in Z$ (см.рис. 2)

Аргументами числа 3 j – следующие углы: $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$; $\varphi_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi$, $\varphi_3 = \frac{\pi}{2} - 2\pi$ (см. рис.2) и вообще каждый из углов $\varphi_k = \frac{\varphi}{2} + 2\pi k$ (см.рис. 2).

Любые два аргумента комплексного числа отличаются друг от друга на слагаемое, кратное 2 π.



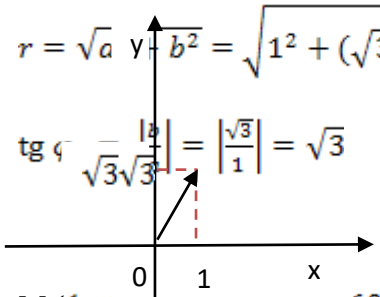
Примеры:

Найти модуль и аргумент комплексного числа.

а) $z = 1 + \sqrt{3}j$

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$

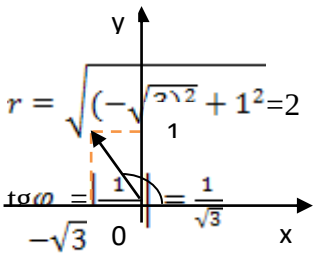
$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{\sqrt{3}}{1}\right| = \sqrt{3}$



$\alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = 60^0$

M $(1; \sqrt{3})$ = [illegible] $= \alpha = 60^0$ (1 четверть)

б) $z = -\sqrt{3} + j$



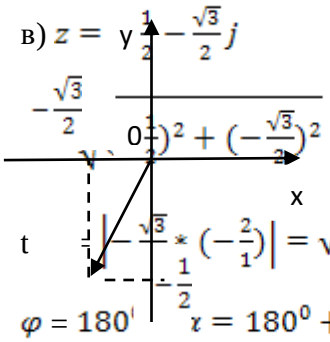
$r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$

$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{1}{-\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = 30^0$, M $(-\sqrt{3}; 1)$ – 2 четверть

$\rho = 180^0 - \alpha = 180^0 - 30^0 = 150^0$

в) $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j$



$r = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (-\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$

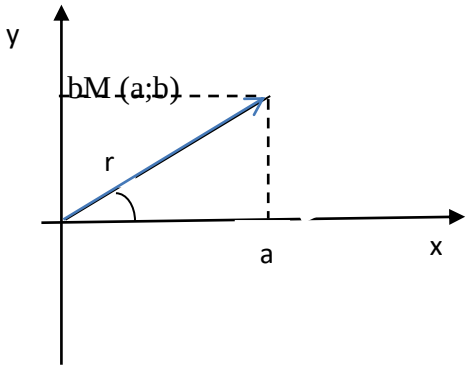
$\operatorname{tg}\varphi = \left|-\frac{\sqrt{3}}{2} * (-\frac{2}{1})\right| = \sqrt{3}$, $\alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = 60^0$

$\varphi = 180^0 + \alpha = 180^0 + 60^0 = 240^0$

или $\varphi = -(180^0 - \alpha) = -(180^0 - 60^0) = -120^0$

5. Тригонометрическая форма комплексного числа.

Пусть дано комплексное число $z = a + bj$. Из Δ OMA можно выразить действительные числаa и b через модуль r и аргумент φ числа z следующим образом: $a = r\cos\varphi,\ b = r\sin\varphi$



Таким ооразом, комплексное число можно записать в виде $z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$,где r – модуль комплексного числа, φ - один из его аргументов.

Представление комплексного числа z в виде**z= r** $(\cos\varphi + j\sin\varphi)$ называется **тригонометрической формой** записи комплексного числа.

6. Правило перехода от алгебраической формы записи комплексного числа к тригонометрической

Для того чтобы перейти от алгебраической формы записи к тригонометрической нужно:

1. Найти модуль комплексного числа по формуле: r= $\sqrt{a^2 + b^2}$

*2. Найти один из аргументов комплексного числа, пользуясь правилом нахождения аргумента***.**

3. Записать комплексное число в тригонометрической форме.

Пример. Записать число $z = -\sqrt{3} - j$в тригонометрической форме.

Решение:

1. r = $\sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$

2. tgα=$\left|\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right| = \sqrt{3}$, α =

arctg$\sqrt{3} = 60^0$, $\varphi = 180^0 + 60^0 = 240^0$

3. $z = 2(\cos 240^0 + j \sin 240^0)$

Чтобы перейти от тригонометрической формы записи обратно к алгебраической форме нужно найти значения sinφ и cosφ при данном аргументе и умножить на модуль.

Например: $z = 3(\cos 120° + j \sin 120°) = 3 * \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} j\right) = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} j$

7. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

1. *Умножение.*

Пусть $z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1)$

$z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2)$

Тогда $z_1 * z_2 = r_1 * r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

Таким образом,*при умножении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются, а аргументы складываются.*

Примеры:

$z_1 = 2 (\cos 40^0 + j \sin 40^0)\, r_1 = 2$, $\varphi_1 = 40^0$

$z_2 = 5(\cos 20^0 + j \sin 20^0)\ r_2 = 5, \quad \varphi_2 = 20°$

$z_3 = 0{,}1(\cos 90^0 - j \sin 90^0)\, r_3 = 0{,}1, \varphi_3 = -90$

Найти $z_1 * z_2 - ?$ $\quad z_1 * z_2 * z_3 - ?$

Решение.

$z_1 * z_2 = 10(\cos 60^0 + j \sin 60^0)$

$z_1 * z_2 * z_3 = \cos(-30^0) + j \sin(-30^0) = \cos 30^0 - j \sin 30^0$

2. *Деление.*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Таким образом, *при делении комплексных чисел модуль частного равен частному модулей делимого и делителя, а аргумент – разности их аргументов.*

Пример:

$z_1 = 8 (\cos 120^0 + j \sin 120^0)$, $z_2 = 2(\cos 30^0 + j \sin 30^0)$

Тогда$\frac{z_1}{z_2} = \frac{8}{2}(\cos(120° - 30°) + j\sin(120° - 30°)) = 4(\cos 90^0 + j\sin 90^0)$

3. *Возведение в степень.*

$z^n = (r(\cos\varphi + j\sin\varphi))^n = r^n(\cos\varphi n + j\sin\varphi n)$ – это формула Муавра.

Таким образом, *при возведении комплексного числа в степень нужно его модуль возвести в данную степень, а аргумент умножить на показатель степени.*

Пример:

$z = (\cos 10^0 + j\sin 10^0)$

$z^5 = 2^5(\cos 10^0 * 5 + j\sin 10^0 * 5) = 32(\cos 50^0 + j\sin 50^0)$

4. *Извлечение корня из комплексного числа.*

$z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + j\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n})$

Пример:

$$\sqrt[4]{81(\cos 180^0 + j\sin 180^0)} = \sqrt[4]{81}\left(\cos\frac{180^0 + 360^0 k}{4} + j\sin\frac{180^0 + 360^0 k}{4}\right) =$$

$= 3(\cos(45^0 + 90^0 k) + j\sin(45^0 + 90^0 k))$

При k = 0, 1, 2, 3 получим

z_0=$3(\cos 45^0 + j\sin 45^0) = 3(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2})$= $\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}j$

z_1=$3(\cos(45^0 + 90^0) + j\sin(45^0 + 90^0)) = 3(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}j$

z_2=$3(\cos(225^0 + j\sin 225^0) = 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}j$

z_3=$3(\cos 315^0 + j\sin 315^0) = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} - j\frac{3\sqrt{2}}{2}$

УПРАЖНЕНИЯ

Изобразить на плоскости числа:

51. $z = 5$; **54.** $z = 5 - 2j$; **57.** $z = 3(\cos 40° + j\sin 40°)$

52. $z = -3j$; **55.** $Z = -3 + 2j$; **58.** $z = 5(\cos 120° + j\sin 120°)$

53. $z = 3 + 2j$; **56.** $z = -1 - 5j$. **59.** $z = 2(\cos 330° + j\sin 330°)$

Записать в тригонометрической форме комплексные числа:

57. $z = 1 + j$. **58.** $z = -2 + 2j$. **59.** $z = \sqrt{3} + j$. **60.** $z = -3 + 3j$.

61. $z = 2\sqrt{2} - 2j\sqrt{6}$; **62.** $z = -\sqrt{3}j$. **63.** $z = -10$. **64.** $z = 6j$.

Найти произведение комплексных чисел z_1 и z_2:

65. $z_1 = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + j\sin\frac{5\pi}{6})$; $z_2 = 0{,}4(\cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2})$.

66. $z_1 = (\cos 45^0 + j\sin 45^0)$; $z_2 = 3(\cos 180^0 + j\sin 180^0)$.

67. $z_1 = 0{,}6(\cos\frac{2\pi}{3} + j\sin\frac{2\pi}{3})$; $z_2 = 5(\cos\frac{5\pi}{6} + j\sin\frac{5\pi}{6})$.

Найти частное комплексных чисел z_1 и z_2:

68. $z_1 = 0{,}6(\cos 120^0 + j\sin 120^0)$; $z_2 = 3(\cos 240^0 + j\sin 240^0)$.

69. $z_1 = 3(\cos 225^0 + j\sin 225^0)$; $z_2 = 5(\cos 45^0 + j\sin 45^0)$.

70. Найти: z^6, если $z = -\sqrt{3} + j$.

71. Вычислить: $z = \sqrt[4]{-16}$.

72. Найти: z^5, если $z = 3 - 3j$.

Найти произведения:

73. $2(\cos 60^0 + j\sin 60^0) * 3(\cos 45^0 + j\sin 45^0)$.

74. $\sqrt{2}(\cos 30^0 + j\sin 30^0) * 2\sqrt{2}(\cos 60^0 + j\sin 60^0)$.

75. $3(\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6}) * 2(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3})$.

76. $\sqrt{3}(\cos 120^0 + j\sin 120^0) * \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos 150^0 + j\sin 150^0)$.

8. Показательная форма комплексного числа.

Показательная форма комплексного числа – это запись комплексного числа в виде

$$z = re^{\varphi j},$$

где r – модуль, φ – аргумент

1. Умножение:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{(\varphi_1+\varphi_2)\cdot j}$$

2. Деление.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1-\varphi_2)j}$$

3. Возведение в степень.

$$z^n = r^n e^{\varphi n j}$$

4. Извлечение корня.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{\frac{\varphi+2\pi k}{n} j}$$

Например: $z_1 = 3e^{\frac{\pi}{4}j}; z_2 = 5e^{\frac{2\pi}{3}j}$.

Действия над комплексными числами в показательной форме выполняются по правилам действия над степенями с общим основанием.

Пример1. Записать число $z = 3(\cos\frac{3\pi}{2} + j\sin\frac{3\pi}{2})$ в показательной форме.

Решение. Из заданной тригонометрической формы устанавливаем, что $r = 3$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$. Подставив эти значения в показательную форму $z = re^{\varphi j}$, получим $z = 3e^{\frac{3\pi}{2}j}$.

Пример2. Записать число $z = -5j$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение. Чтобы представить число z в виде $z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$ и $z = re^{\varphi j}$, нужно найти модуль и аргумент числа z.

$r = 5,\ \varphi = 270°$, так как точка M(0;-5), соответствующая данному числу, находится на оси Oy. Получим $z = 5(\cos 270° + j\sin 270°)$ и $z = 5e^{270°}$.

Пример3. Записать число $z = 3 - 3\sqrt{3}j$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение. 1. Найдём модуль $r = \sqrt{3^2 + (-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 9 \cdot 3} = 6.$

2. Найдём аргумент φ.

$tg\alpha = \left|\frac{-3\sqrt{3}}{3}\right| = \sqrt{3}$, *тогда* $\alpha = 60°$.

Точка $M(3; -3\sqrt{3})$ находится в 4 четверти, поэтому $\varphi = 360° - 60° = 300°$.

Тогда тригонометрическая форма $z = 6(\cos 300° + j\sin 300°)$ и показательная $z = 6e^{300°j}$.

УПРАЖНЕНИЯ

Записать комплексные числа в тригонометрической и показательной формах:

97. $z = 5j$. **98.** $z = -6$. **99.** $z = -2 - 2j$.

100. $z = 3 + \sqrt{3}j$. **101.** $z = 1 - j$. **102.** $z = -3\sqrt{3} + 3j$.

2.Основы дискретной математики

2.1.Теоретический материал

Множества обозначаются прописными буквами, а элементы множество строчными буквами. Элементы множеств заключаются в фигурные скобки. Если элемент x принадлежит множеству X, то записывают x ∈ X (∈ — принадлежит). Если множество A является частью множества B, то записывают A ⊂B (⊂ — содержится). Множество может быть задано одним из двух способов: перечислением и с помощью определяющего свойства. Например, перечислением заданы следующие множества: 1) A={1,2,3,5,7} — множество чисел; 2) X={x1,x2,...,xn} — множество некоторых элементов x1,x2,...,xn; 3) N={1,2,...,n} — множество натуральных чисел; 4) Z={0,±1,±2,...,±n} — множество целых чисел. Два множества A и B равны (A=B), если они состоят из одних и тех же элементов. Объединением (суммой) множеств A и B называется множество A ∪ B, элементы которого принадлежат хотя бы одному из этих множеств. Пересечением (произведением) множеств A и B называется множество A ∩ B, элементы которого принадлежат как множеству A, так и множеству B. Разностью множеств A и B называется множество AB, элементы которого принадлежат множеству A, но не принадлежат множеству B. Симметричной разностью множеств A и B называется множество A Δ B, являющееся объединением разностей множеств AB и BA, то есть A Δ B = (AB) ∪ (BA).Если A={1,2,3,4}, B={3,1,4,2} то A=B.

если A={1,2,4}, B={3,4,5,6}, то A ∪ B = {1,2,3,4,5,6}

Если A={1,2,4}, B={3,4,5,2}, то A ∩ B = {2,4}

Если A={1,2,3,4}, B={3,4,5}, то AB = {1,2}

Если A={1,2,3,4}, B={3,4,5,6}, то A Δ B = {1,2} ∪ {5,6} = {1,2,5,6}

УПРАЖНЕНИЯ

1.Пусть $A = \{x|x \in N;\ 1 \le x \le 5\}$, тогда это множество, заданное перечислением всех его элементов, имеет вид …

А) $A = \{2, 3, 4 \ldots\}$Б) $A = \{2, 3, 4\}$

В) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ Г) $A = \{1, 2, 3, 4, 5 \ldots\}$

2.Пусть $A = \{x | x \in Z;\ -3 \leq x \leq 3\}$, тогда это множество, заданное перечислением всех его элементов, имеет вид …

А) $A = \{1, 2, 3, \}$Б) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

В) $A = \{0, 1, 2, 3\}$Г) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

3.Пусть $A = \{x |\ 3 \leq x \leq 11; x = 2n;\ n \in N\}$, тогда это множество, заданное перечислением всех его элементов, имеет вид …

А) $A = \{4, 6, 8, 10\}$Б) $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

В) $A = \{4, 6, 8, 10 \ldots\}$ Г) $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

4.Пусть $A = \{1, 3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$. Тогда прямое произведение $A \times B$ равно …

А)$\{(1; 2); (1; 4); (1; 6); (3; 2); (3; 4); (3; 6)\}$Б)$\{(1; 2); (1; 4); (1; 6)\}$

В)$\{(2; 1); (4; 1); (6; 1); (2; 3); (4; 3); (6; 3)\}$Г)$\{2; 4; 9; 6; 12; 18\}$

5.Пусть $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4\}$.Тогда прямое произведение $A \times B$ равно …

А)$\{(1; 2); (1; 4); (3; 2); (3; 4); (5; 2); (5; 4)\}$Б)$\{(3; 2); (3; 4)\}$

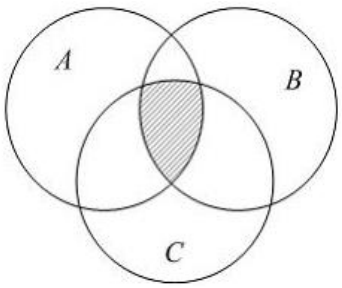
В)$\{(2; 1); (4; 1); (2; 3); (4; 3); (2; 5); (4; 5)\}$Г)$\{2; 4; 6; 12; 10; 20\}$

6.Пусть $= \{a, b\}$, $B = \{2, 4\}$.Тогда прямое произведение $A \times B$ равно …

А)$\{(a; 2); (b; 2); (a; 4); (b; 4)\}$ Б)$\{2a; 4a; 2b; 4b\}$

В)$\{(2; a); (2; b); (4; a); (4; b)\}$ Г)$\{(a; 2); (b; 4)\}$

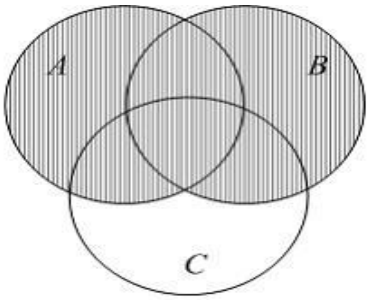
7.Пусть на рисунке изображены множества A, B и C. Тогда заштрихованная область соответствует множеству…



А) $A \cup B \cup C$ Б) $A \cap B \cap C$

В)$A \cap B$ Г)$B \setminus A$

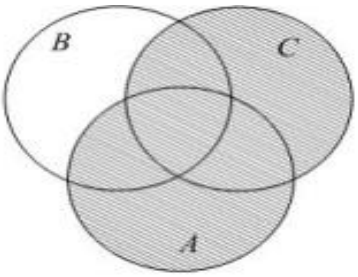
8. Пусть на рисунке изображены множества A, B и C. Тогда заштрихованная область соответствует множеству…



А) $A \cup B$ Б)$(A \cup B) \setminus C$

В)$A \cap B$Г)$B \setminus A$

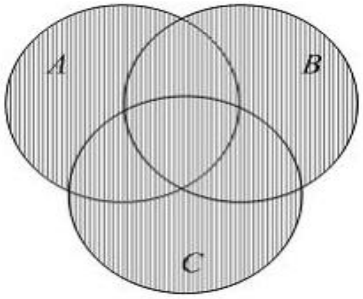
9.Пусть на рисунке изображены множества A, B и C. Тогда заштрихованная область соответствует множеству…



А) $A \cup C$ Б) $B \setminus C$

В) $A \cap C$Г)$B \setminus A$

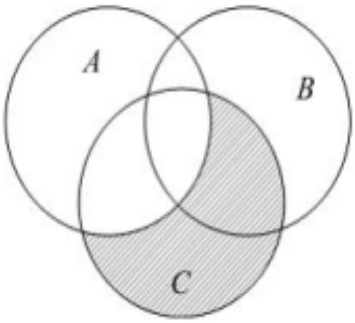
10.Пусть на рисунке изображены множества A, B и C. Тогда заштрихованная область соответствует множеству…



А) $A \cup B \cup C$ Б) $A \cup C$

В)$A \cap B \cap C$ Г)$(A \cup B) \setminus C$

11.Пусть на рисунке изображены множества A, B и C. Тогда заштрихованная область соответствует множеству…



А) $A \cup C$ Б) $C \setminus A$

В) $A \cap C$Г)$A \setminus C$

12. Даны множества $A = \{x | x \in N;\ 1 \leq x \leq 4\}$ и $B = \{x | x \in N; 3 \leq x \leq 5\}$. Тогда объединение множеств $A \cup B$ равно …

А) ∅Б) $\{3,4\}$В) $\{1,2,3,4,5\}$ Г) $\{1,5\}$

13. Даны множества $A=\{x|x\in N;\ 1<x<8\}$ и $B=\{x|x\in N; 5<x<12\}$. Тогда пересечение множеств $A\cap B$ равно …

А) ∅Б)$\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$

В)$\{6,7\}$Г) $\{2,3,4,5,8,9,10,11\}$

14. Даны множества $A=\{x|x\in N;\ 2<x<5\}$ и $B=\{x|x\in N; 1<x<6\}$. Тогда пересечение множеств $A\cap B$ равно …

А) ∅Б) $\{3,4\}$В) $\{2,5\}$ Г) $\{2,3,4,5\}$

15. Даны множества $A=\{x|x\in Z;\ 1<x<4\}$ и $B=\{x|x\in Z; 3<x<6\}$. Тогда объединение множеств $A\cup B$ равно …

А) ∅Б) $\{2,3,4,5\}$В) $\{3,4\}$ Г) $\{1,2,3,4,5,6\}$

16. Даны множества $A=\{x|x\in N;\ 1\le x\le 8\}$ и $B=\{x|x\in N; 5\le x\le 12\}$. Тогда объединение множеств $A\cup B$ равно …

А) ∅ Б) $\{5,6,7,8\}$ В) $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ Г) $\{1,2,3,4,5\}$

17. Даны множества $A=\{x|x\in N;\ 2\le x\le 4\}$ и $B=\{x|x\in N; 3\le x\le 9\}$. Тогда пересечение множеств $A\cap B$ равно …

А) ∅ Б)$\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$ В)$\{3,4\}$ Г) $\{5,6,7,8\}$

18.Числовые множества – это множества элементами которых являются числа. Примеры таких множеств :N - множество натуральных чисел,
Z -множество целых чисел, Q - множество рациональных чисел,
R - множество действительных чисел. Пусть дано множество
$A=\{2;\ \sqrt{2};\ -4\}$, тогда верными будут утверждения…
Укажите **не менее двух** вариантов ответа

А) $A\subset R$ Б) $A\subset Z$В) $A\subset N$ Г)$A\cup R=R$

19.Числовые множества – это множества элементами которых являются числа. Примеры таких множеств :N - множество натуральных чисел,
Z -множество целых чисел, Q - множество рациональных чисел,
R - множество действительных чисел. Пусть дано множество
$A=\{-2;\ -8;\ -6\}$, тогда верными будутутверждения…
Укажите **не менее двух** вариантов ответа

А) $A \subset R$ Б) $A \subset Q$В) $A \subset N$ Г)$Z \subset A$

20. Даны множества $A = \{n|n \in N;\ n -$ четное$\}$ и $B = \{x|x^2 - 6x + 8 = 0\}$.
Тогда верными будутутверждения…
Укажите **не менее двух** вариантов ответа

А) $B \subset A$ Б) $B = \{-2;\ -4\}$

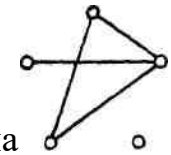
В)$B = \{2;\ 4\}$Г)множествоA конечно

2.2 Теоретический материал

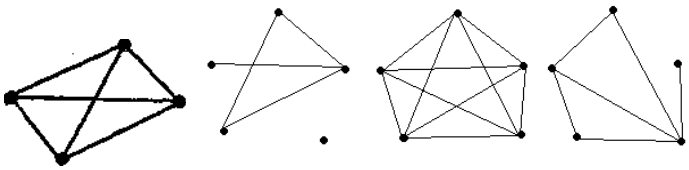
Граф представляет собой непустое множество точек и множество отрезков, оба конца которых принадлежат заданному множеству точек. Обозначать граф будем буквой Г.

Точки иначе называют *вершинами,* отрезки — *ребрами графа.*

Вершины, которые не принадлежат ни одному ребру, называются *изолированными.*

На рисунке одна изолированная вершина 

Граф называется *полным*, если каждые две различные вершины его соединены одним и только одним ребром.



Дополнением графа Г называется граф Г с теми же вершинами, что и граф Г, и с теми и только теми ребрами, которые необходимо добавить к графу Г, чтобы получился полный граф.

Степенью вершины называется число ребер графа, которым принадлежит эта вершина.

Вершина называется *нечетной,* если ее степень — число нечетное. Вершина называется *четной,* если ее степень — число четное.

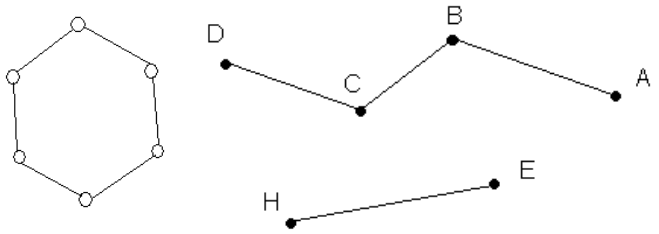
Путем от A_1 до A_n в графе называется такая последовательность ребер ведущая от A_1 до A_n , в которой каждые два соседних ребра имеют общую вершину и никакое ребро не встречается более одного раза.

Циклом называется путь, в котором совпадают его начальная и конечная вершины.

Длиной пути называется число ребер этого пути.

Длиной цикла называется число ребер в этом цикле.

Две вершины А и В графа называются *связными*, если в графе существует путь с концами А и В.



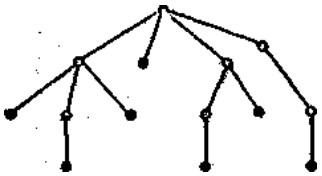
Две вершины графа называются *несвязными*, если в графе не существует ни одного пути, связывающего их.

В графе вершины А и В — связные, а вершины А и Н — несвязные.

Граф называется *связным*, если каждые две вершины его связные.

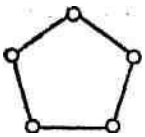
Граф называется *несвязным*, если хотя бы две вершины его несвязные.

Деревом называется всякий связный граф, не имеющий циклов.



Задача 1. Утверждают, что в одной компании из пяти человек каждый знаком с двумя и только с двумя другими. Возможна ли такая компания?

Решение. Каждого из этой компании изобразим на рисунке кружком. Если двое знакомы, соединим соответствующие кружки отрезком. Оказывается, что такие ситуации не только возможны, но все их можно описать аналогичными схемами. Из рассматриваемой компании нельзя выделить ни «четырехугольник», ни «треугольник», поскольку тогда из оставшихся нельзя будет составить компанию, удовлетворяющую условию, т. е. схема знакомства единственная.



Задача2. Девять шахматистов проводят турнир в один круг (каждый из участников должен сыграть с каждым из остальных по одному разу). Покажите, что в любой момент найдутся двое, закончившие одинаковое число партий.

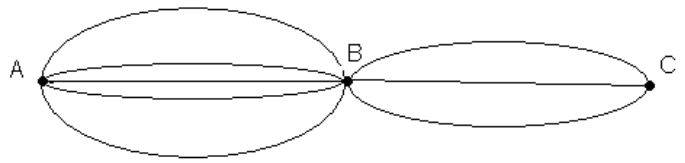
Решение. Переведем условие задачи на язык графов. Каждому из шахматистов поставим в соответствие вершину графа, соединим ребрами попарно вершины, соответствующие шахматистам, уже сыгравшим между собой партию. Получим граф с девятью вершинами. Степени его вершин равняются числу партий, сыгранных соответствующими игроками. Покажем, что во всяком графе с девятью вершинами всегда найдутся хотя бы две вершины одинаковой степени.

Каждая вершина графа с девятью вершинами может иметь степень, равную 0, 1, 2,…,7, 8. Предположим, что существует граф Г, все вершины которого имеют разную степень, т. е. каждое из чисел последовательности 0, 1, 2 7, 8 является степенью одной и только одной из его вершин. Но этого не может быть. Действительно, если в графе есть вершина *A* степени 0, то в нем не найдется вершина *B* со степенью 8, так как эта вершина В должна быть соединена ребрами со всеми остальными вершинами графа, в том числе и с *A*. Иначе говоря, в графе с девятью вершинами не могут быть одновременно вершины степени 0 и 8. Следовательно, найдутся хотя бы две вершины, степени которых равны между собой.

Вернемся к задаче. Доказано, что в любой момент найдутся хотя бы двое, сыгравшие одинаковое число партий.

Задача 3. Вершины графа обозначают населенные пункты, ребра – дороги. Сколькими способами можно выбрать путь из А в С? Сколькими способами можно доехать из А в С, затем вернуться обратно, если нельзя проезжать дважды по одной и той же дороге?

Решение:



$5 \cdot 3=15$ способами можно выбрать путь из А в С.

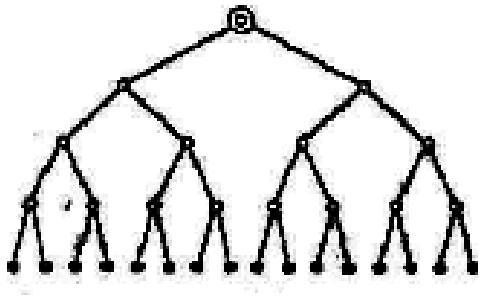
$5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 =120$ способами можно доехать из А в С, затем вернуться обратно, если нельзя проезжать дважды по одной и той же дороге.

УПРАЖНЕНИЯ

Задача 1. Может ли так случиться, что в одной компании из шести человек каждый знаком с двумя и только с двумя другими?

Задача 2. Кубок по настольному теннису разыгрывается по олимпийской системе. Встречи проводятся без ничьих. К очередному туру допускаетсятолько победившая в предыдущем туре команда. Проигравшие выбывают из игры. Для завоевания кубка команда должна победить во всех турах.

На участие в розыгрыше кубка поданы заявки от 16 команд. Схема проведения игр изображается графом на рисунке.



Вершины нижнего «яруса» дерева (закрашенные) интерпретируем как команды, участвующие в розыгрыше кубка, вершины второго снизу яруса — как команды-победительницы в одной шестнадцатой финала, вершины третьего яруса — как команды победительницы в одной восьмой финала и т.д.

Какую информацию можно получить с помощью этого дерева?Задача3. На гору ведут 5 дорог. Сколькими способами можно выбрать маршрут для того, чтобы подняться на гору, а затем спуститься с неё? Как изменится ответ, если нельзя подниматься и спускаться по одной и той же дороге?

3.Математический анализ

3.1Теоретический материал

Производной функции $y = f(x)$ по аргументу x называется предел отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю. Производная обозначается y', y'_x, $f'(x)$, $\frac{df(x)}{dx}$. Таким образом,

$$y' = y'_x = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Рассмотрим *геометрический смысл производной*. Пусть дана некоторая функция $f(x)$. Значение производной этой функции в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции через точку $M(x_0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$:

$$f'(x_0) = k.$$

Уравнение касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$, в общем виде записывается следующим образом:

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0).$$

Физический смысл производной заключается в следующем: пусть зависимость пути, пройденного материальной точкой, описывается функцией $s = f(t)$. Производная этой функции в точке t_0 равна значению мгновенной скорости движения материальной точки в данный момент времени:

$$v(t_0) = s'(t_0).$$

Перечислим *правила дифференцирования*:

1) $C' = 0$;
2) $(u \pm v)' = u' + v'$;
3) $(uv)' = u'v + v'u$;
4) $(Cf)' = Cf'$;
5) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

Производная сложной функции вида $y = f(g(x))$ равна

$$y' = f'(g(x))g'(x).$$

таблица производных основных элементарных функций:

1) $(kx+b)' = k$; 2) $(x^n)' = nx^{n-1}$; 3) $(x^2)' = 2x$;

4) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; 5) $\sin' x = \cos x$; 6) $\cos' x = -\sin x$;

7) $tg'x = \frac{1}{\cos^2 x}$; 8) $ctg'x = -\frac{1}{\sin^2 x}$; 9) $(a^x)' = a^x \ln a$;

10) $(e^x)' = e^x$; 11) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$; 12) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

13) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 14) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

15) $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$; 16) $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Произвольное приращение независимой переменной x называется *дифференциалом независимой переменной* и обозначается через Δx или dx ($\Delta x = dx$).

1. Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x является произведение ее производной $f'(x)$ на дифференциал dx аргумента x.

2. Согласно определению дифференциала функции имеем:
$dy = f'(x)$, или $dy = y' \cdot dx$, или $df(x) = f'(x)dx$.

3. Отсюда следует: $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, или $y' = \frac{dy}{dx}$, или $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$,
т.е. производную от функции $y = f(x)$ можно представить как отношение дифференциала функции к дифференциалу аргумента.

Пример: Найдите производные функций:
а) $y = 5x^2 \sin x$; б) $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$; в) $y = \sin^2\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Решение. Вычислим производные заданных функций:

а) $y' = (5x^2 \sin x)' = (5x^2)' \sin x + (\sin x)' 5x^2 =$

$= 10x \sin x + 5x^2 \cos x = 5x(2\sin x + x\cos x)$

б) $y' = \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{(\ln x)'\sqrt{x} - (\sqrt{x})' \ln x}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$;

в) $y' = \left(\sin^2\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)' = 2\sin\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sin\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)' = 2\sin\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cos\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' =$

$= \sin\left(2\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)\left(1+(x^{-1/2})'\right) = \sin\left(2\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)\left(1-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right)$

УПРАЖНЕНИЯ

1.Производная функции $y = x \cdot \cos x$ имеет вид …

А) $y' = -\sin x$ В) $y' = \cos x - x \sin x$

Б) $y' = 1 - \sin x$ Г)$y' = \cos x + x \sin x$

2. Производная функции $y = (x^2 + x) \cdot \ln x$равна …

А) $\frac{2x+1}{x}$Б)$(2x+1) \cdot \ln x + x + 1$В) $(2x+1) \cdot \ln x$Г) $2x + \frac{1}{x}$

3.Производная функции $y = x^3 \cdot e^x$ имеет вид …

А) $y' = 3x^2 \cdot e^x - x^3 \cdot e^x$ В) $y' = 3x^2 + e^x$

Б) $y' = 3x^2 \cdot e^x$Г)$y' = 3x^2 \cdot e^x + x^3 \cdot e^x$

4.Производная функции $y = x^2 \cdot \sin x$ имеет вид …

А) $y' = 2x \cdot \cos x - x^2 \sin x$ В) $y' = 2x \cdot \cos x$

Б) $y' = 2x + \cos x$ Г)$y' = 2x \cdot \sin x + x^2 \cos x$

5.Производная функции $y = x^4 \cdot e^x$ имеет вид …

А) $y' = 4x^3 \cdot e^x + x^4 \cdot e^x$В) $y' = 4x^3 \cdot e^x$

Б) $y' = 4x^3 \cdot e^x - x^4 \cdot e^x$Г)$y' = 4x^3 + e^x$

6.Производная функции $y = 9x - x^6 \cdot e^x$ имеет вид …

А) $y' = 9 - 6x^5 + e^x$В) $y' = 9 - 6x^5 \cdot e^x$

Б) $y' = 9 - x^5 \cdot e^x(6 + x)$ Г)$y' = -x^5 \cdot e^x(6 + x)$

7.Производная функции $y = (x^2 + 6x) \cdot \sin x$ имеет вид …

А) $y' = (2x + 6) \cdot \cos x$В) $y' = (2x + 6) \cdot \sin \mathrm{x} - (\mathrm{x}^2 + 6\mathrm{x}) \cdot \cos x$

Б) $y' = 2x + \cos x$Г)$y' = (2x + 6) \cdot \sin \mathrm{x} + (\mathrm{x}^2 + 6\mathrm{x}) \cdot \cos x$

8.Производная функции $y = x^3 \cdot e^x + 5x$ имеет вид …

А) $y' = x^2 \cdot e^x(3 + x)$ В) $y' = x^4 \cdot e^x + 5$

Б) $y' = x^2 \cdot e^x(3 + x) + 5$Г)$y' = 3x^2 \cdot e^x + 5$

9.Производная функции $y = (\sin x + \cos x) \cdot e^x$ имеет вид …

А) $y' = 2 \sin x \cdot e^x$В) $y' = (\cos x - \sin x) \cdot e^x$

Б) $y' = 2\cos x \cdot e^x$ Г) $y' = \cos x - \sin x + e^x$

10. Производная функции $y = (x^2 + 5x) \cdot e^x$ равна …

А) $y' = 2(2x + 5) \cdot e^x$ В) $y' = (2x + 5) \cdot e^x$

Б) $y' = x \cdot (2x + 5) \cdot e^{x-1}$ Г) $y' = (x^2 + 7x + 5) \cdot e^x$

11. Производная функции $y = e^{x^2+x}$ равна …

А) $(x^2 + x) \cdot e^{x^2+x-1}$ Б) $2x + 1 + e^{x^2+x}$ В) e^{x^2+x} Г) $(2x + 1) \cdot e^{x^2+x}$

12. Производная функции $y = e^{2x-1}$ равна …

А) $2 \cdot e^{2x-1}$ Б) $2 \cdot e^x$ В) e^{2x-1} Г) $x \cdot e^{2x-1}$

13. Производная функции $y = (2x + 5)^3$ равна …

А) $3 \cdot (2x - 5)^2$ Б) $6 \cdot (2x - 5)$ В) $3 \cdot (2x - 5)$ Г) $6 \cdot (2x - 5)^2$

14. Производная функции $y = \sin(3x + 2)$ равна …

А) $-3\cos(3x + 2)$ Б) $3\cos(3x + 2)$ В) $3\cos x$ Г) $\cos(3x + 2)$

15. Производная функции $y = \ln(3x - 2)$ равна …

А) $\frac{1}{3x-2}$ Б) $\frac{3}{3x-2}$ В) $\frac{1}{3x-2} + 3$ Г) $3 \cdot \ln(3x - 2)$

3.2 Теоретический материал

Исследовать функцию $y = x^2 - \frac{1}{x}$ методами дифференциального исчисления и постройте ее график.

Решение.

Проведем исследование функции в соответствии с общей схемой.

1. Область определения $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
2. Функция имеет разрыв в точке x=0:

$$\lim_{x \to 0-0}\left(x^2 - \frac{1}{x}\right) = +\infty, \quad \lim_{x \to 0+0}\left(x^2 - \frac{1}{x}\right) = -\infty.$$

Имеем точку разрыва 2-го рода. Прямая x=0 – вертикальная асимптота графика функции.

3. Найдем значения x, при которых y=0:

$x^2 - \frac{1}{x} = 0$, $x^3 = 1$, $x = 1$.

График функции пересекает координатные оси в единственной точке (1; 0).

Определим интервалы знакопостоянства функции:

X	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
$У$	+	Не существует	-	0	+

4. Функция не является ни четной, ни нечетной. Она непериодическая.

5. Найдем точки, для которых $y' = 0$.

$y' = \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)' = 2x + \frac{1}{x^2} = 0$, отсюда $2x^3 = -1$, $x = \frac{-1}{\sqrt[3]{2}} \approx -0{,}794$.

6. Определим интервалы возрастания и убывания функции:

x	$\left(-\infty, -1/\sqrt[3]{2}\right)$	$-1/\sqrt[3]{2}$	$\left(-1/\sqrt[3]{2}, 0\right)$	0	$(0,\infty)$
y'	–	0	+	Не существует	+
y	↘	$1/\sqrt[3]{2}$	↗	Не существует	↗

Определим точки экстремума:

$$y\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2-1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 0{,}794,$$

т.е. получили точку минимума.

7. Найдем критические точки 2-го рода:

$y'' = \left(2x - \frac{1}{x^2}\right)' = 2 - 2\frac{1}{x^3} = 2\left(1 - \frac{1}{x^3}\right) = 0$, отсюда $\frac{1}{x^3} = 1$, $x = 1$.

8. Определим интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,0)$
y''	+	Не существует	–	0	+

y	Выпуклость вниз	Не существует	Выпуклость вверх	0	Выпуклость вниз

Таким образом, точка x=1 является точкой перегиба.

9. Найдем наклонные асимптоты (если они существуют):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(x-\frac{1}{x^2}\right)=\infty .$$

Так как предел не равен конечному числу, горизонтальные и наклонные асимптоты отсутствуют.

10. На основании проведенного анализа поведения функции построим ее график

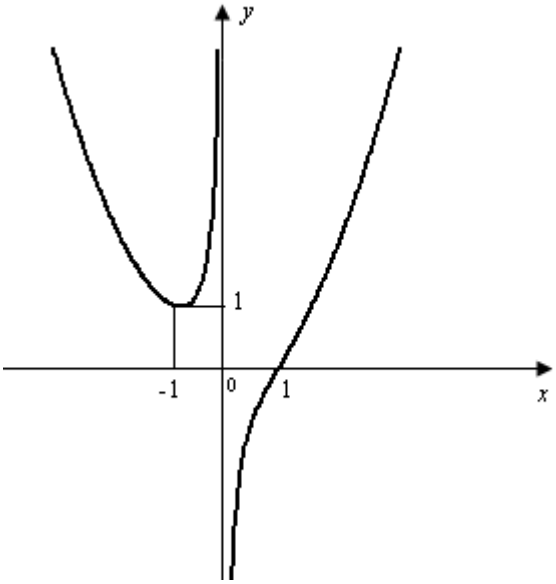


График функции $y=x^2-\frac{1}{x}$

УПРАЖНЕНИЯ

1.Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и построить ее график. При исследовании следует найти ее интервалы возрастания и убывания и точки экстремума, интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции

$y=x^3+6x^2+9x+1.$

2.Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и построить ее график: $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 9$

3.Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и построить ее график: $y = 2 - 3x^2 - x^3$

6.Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и построить ее график :$y = 6x - 8x^3$

4.Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и построить ее график: $y = 12x^2 - 8x^3 - 2$

5.Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и построить ее график: $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

3.3Теоретический материал

Функция $F(x)$, определенная на некотором множестве D, называется *первообразной для функции* $f(x)$, определенном на том же множестве, если функция $F(x)$ дифференцируема для любых $x \in D$, причем

$$F'(x) = f(x).$$

Можно показать, что если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на некотором множестве D, то и функция $F(x) + C$, где C-константа, также будет первообразной для функции $f(x)$ на этом же множестве. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$, определенной на множестве D, называется *неопределенным интегралом от функции* $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Перечислим свойства неопределенного интеграла.

1. *Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, а его дифференциал – подынтегральному выражению*:

$$(\int f(x)dx)' = f(x), \quad d(\int f(x)dx) = f(x)dx.$$

2. *Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен сумме этой функции и произвольной константы*:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

3. *Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла*:

$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, где $k = const \neq 0$.

4. *Неопределенный интеграл от суммы (разности) двух непрерывных функций равен сумме (разности) интегралов от этих функций*:

$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Таблица неопределенных интегралов:

1) $\int dx = x + C$;

2) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$;

3) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$;

5) $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

6) $\int \cos x dx = \sin x + C$;

7) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$;

8) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$;

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$;

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

11) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$;

12) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$

Рассмотрим некоторую функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[a;b]$. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n частей точками $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ так, чтобы

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b.$$

Обозначим длину отрезка $[x_{k-1}; x_k]$ как $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. На каждом из таких отрезков выберем произвольным образом точку ξ_k и рассмотрим сумму

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k .$$

Последнее выражение называют *интегральной суммой*. Если существует не зависящий от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на части и выбора точек ξ_k предел интегральной суммы при $\Delta x \to 0$ (где $\Delta x = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n\}$), то его называют *определенным интегралом от функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a;b]$ и обозначают

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx .$$

Рассмотрим геометрический и физический смысл определенного интеграла. Будем называть *криволинейной трапецией* фигуру, ограниченную графиком функции $y = f(x)$,

прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью Ox (рис.1). Площадь криволинейной трапеции вычисляется как значение определенного интеграла от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, т.е.

$$S = \int_a^b f(x)dx .$$

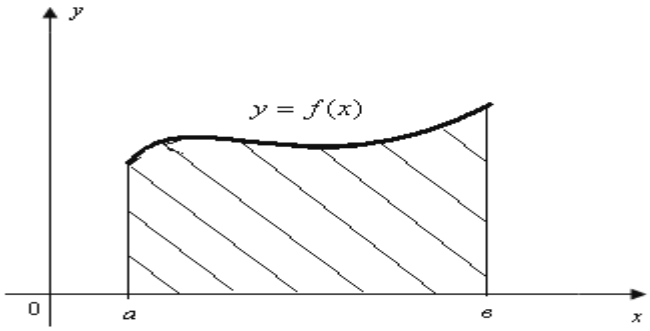


Рис.1 Криволинейная трапеция

Определенный интеграл может быть использован при решении ряда физических задач. Например, путь, пройденный телом за промежуток времени $[t_1; t_2]$ при скорости, изменяющейся с течением времени по закону $v = v(t)$, определится как

$$S=\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt\,.$$

Для вычисления определенных интегралов используется *формула Ньютона – Лейбница*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a),$$

где $F(a)$ и $F(b)$ - значения любой из первообразных $F(x)+C$ при $x=a$ и при $x=b$ соответственно.

Свойства определенного интеграла.

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
2. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, *где* $k=const$.
3. $\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.
4. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, *где* $a<c<b$.
5. *Если* $f(x)\ge 0$ *для всех* $x\in[a,b]$ и $a<b$, *то* $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.
6. *Если* $f(x)\ge g(x)$ *для всех* $x\in[a,b]$, *то* $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$.
7. *Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a;b]$ и $a<b$, *то*

$$m(b-a)\le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

8. *Для непрерывной на отрезке* $[a;b]$ *функции* $f(x)$ *существует такая точка* $c\in[a,b]$, *что*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

1.Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_1^4 (x^2+2\sqrt{x})dx$; б) $\int_4^8 \frac{x+3}{x^2+6x}dx$; в) $\int_1^e \ln x dx$.

Решение. а) Применим метод непосредственного интегрирования:

$$\int_1^4 (x^2+2\sqrt{x})dx = \left(\frac{x^3}{3}+2\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}\right)\Bigg|_1^4 = \left(\frac{4^3}{3}+2\cdot\frac{2}{3}\cdot 4^{3/2}\right)-\left(\frac{1^3}{3}+2\cdot\frac{2}{3}\cdot 1^{3/2}\right)=\frac{64}{3}+\frac{8}{3}-\frac{1}{3}-\frac{4}{3}=\frac{67}{3};$$

б) Воспользуемся методом подстановки: $x^2+6x=t$, $(2x+6)dx=dt$.

Найдем пределы интегрирования для переменной t:

$$x=4: \qquad t=4^2+6\cdot 4=40,$$

$$x=8: \qquad t=8^2+6\cdot 8=112.$$

Тогда имеем:

$$\int_4^8 \frac{x+3}{x^2+6x}dx=\frac{1}{2}\int_4^8 \frac{(2x+6)}{x^2+6x}dx=\frac{1}{2}\int_{40}^{112}\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln t\Big|_{40}^{112}=\frac{1}{2}(\ln 112-\ln 40)=\frac{1}{2}\ln\frac{112}{40}=\frac{1}{2}\ln 2{,}8;$$

в) Для вычисления данного интеграла используем метод интегрирования по частям:

$$u=\ln x, \quad du=\frac{dx}{x}, \quad dv=dx, \quad v=x.$$

Далее применим формулу $\int udv=uv-\int vdu$, получаем:

$$\int_1^e \ln x dx=x\ln x\Big|_1^e-\int_1^e x\frac{dx}{x}=x\ln x\Big|_1^e-x\Big|_1^e=(e\ln e-1\cdot\ln 1)-(e-1)=e-0-e+1=1.$$

2.Вычислите площади фигур, ограниченных указанными линиями:
а) $y=x^2-1$, $x=0$, $y=0$, $x=2$; б) $y=x^2$, $y=2x$.

Решение. а) Построим графики указанных в условии функций (рис.2, а). Искомую площадь можно найти как сумму площадей фигур *OAD* и *ABC*:

$$S=S_{OAD}+S_{ABC}.$$

Так как фигура *OAD* расположена ниже оси *Ox*, значение интеграла

$$\int_0^1 \left(x^2-1\right)dx$$

будет отрицательным и площадь фигуры *OAD* определится как модуль этого интеграла. Тогда

$$S=S_{OAD}+S_{ABC}=\left|\int_0^1\left(x^2-1\right)dx\right|+\int_1^2\left(x^2-1\right)dx=\left|\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_0^1\right|+\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_1^2=$$

$$=\left|\left(\frac{1}{3}-1\right)-0\right|+\left(\frac{8}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)=\left|-\frac{2}{3}\right|+\frac{4}{3}=2;$$

б) Графики функций, приведенных в условии, показаны на рис.2,*б*. Как следует из рисунка, площадь заштрихованной фигуры

$$S=\int_0^2 2xdx-\int_0^2 x^2dx=\int_0^2(2x-x^2)dx=\left(\frac{2x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\left(4-\frac{8}{3}\right)-0=\frac{4}{3}.$$

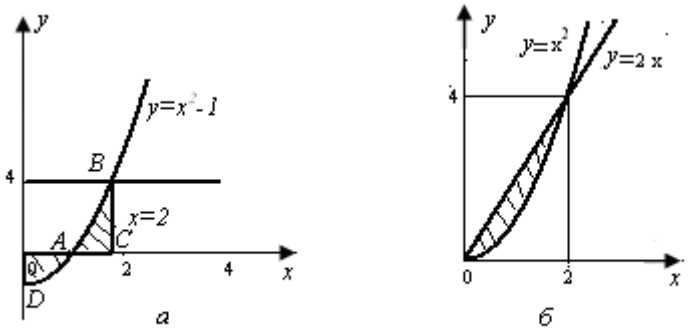


Рис. 2

УПРАЖНЕНИЯ

1. Вычислить определенные интегралы.

2. а) $\int_{-1}^{2} 2dx$ б) $\int_{-2}^{0}\left(x^2+5x+6\right)dx$ в) $\int_0^1 (2x^3+1)^4\cdot x^2dx$

3. а) $\int_{-2}^{2}(3-x)dx$ б) $\int_{-1}^{0}\left(x^2+4x+3\right)dx$ в) $\int_{\sqrt{3}}^{2}\frac{2\cdot\sqrt[3]{x^4-8}\cdot x^3}{3}dx$

4. а) $\int_1^3\left(x^2-2x\right)dx$ б) $\int_{-4}^{0}\left(x^2+7x+12\right)dx$ в) $\int_0^1 (5x^3+2)^4\cdot x^2dx$

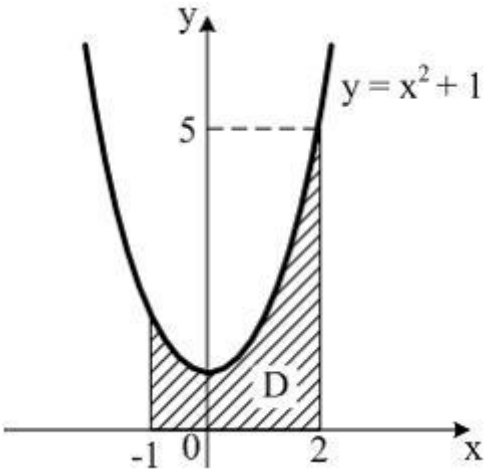
5. а) $\int_{-1}^{1}\left(2x-3x^2\right)dx$ б) $\int_0^3\left(9x^2+9x+11\right)dx$ в) $\int_0^{\pi/2}12^{\sin x}\cdot\cos xdx$

6. а) $\int_1^8\sqrt[3]{x}dx$ б) $\int_0^2\left(3x^2+5\right)dx$ в) $\int_0^{\sqrt{\pi/2}}\frac{xdx}{\cos^2 x^2}$

7. а) $\int_1^2\frac{dx}{x^3}$ б) $\int_0^3\left(3-7x^2\right)dx$ в) $\int_0^3\frac{1}{(1+2x)^9}dx$

8. а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx$ б) $\int_{-1}^{3}\left(x^2+2x+1\right)dx$ в) $\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx$

9. Площадь криволинейной трапеции *D* определяется интегралом …



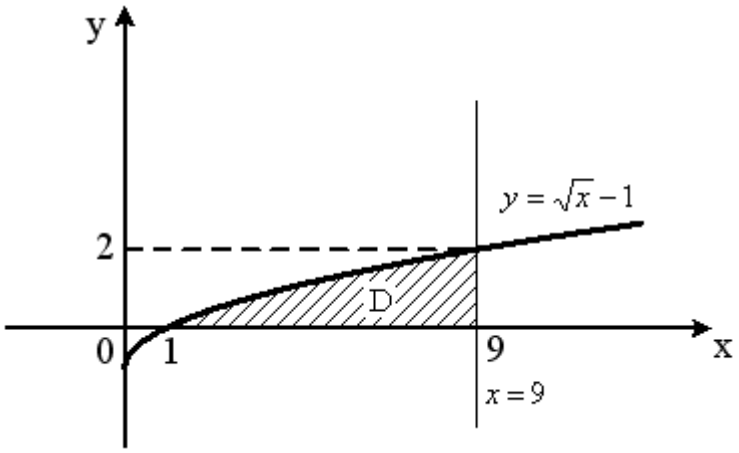
10. А) $\int_{-1}^{2}(x^2+1)dx$

Б) $\int_0^5(x^2+1)dx$

11. В) $-\int_{-1}^{0}(x^2+1)dx+\int_{0}^{2}(x^2+1)dx$

12. Г) $\int_{0}^{2}(x^2+1)dx$

10.Площадь криволинейной трапеции *D* определяется интегралом …



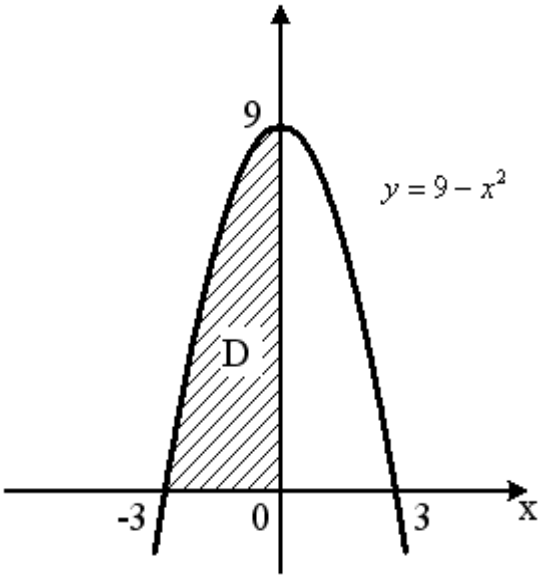
А) $\int_{0}^{1}(\sqrt{x}-1)dx$

Б) $\int_{0}^{2}(\sqrt{x}-1)dx$

В) $\int_{0}^{9}(\sqrt{x}-1)dx$

Г) $\int_{1}^{9}(\sqrt{x}-1)dx$

11. Площадь криволинейной трапеции *D* определяется интегралом …



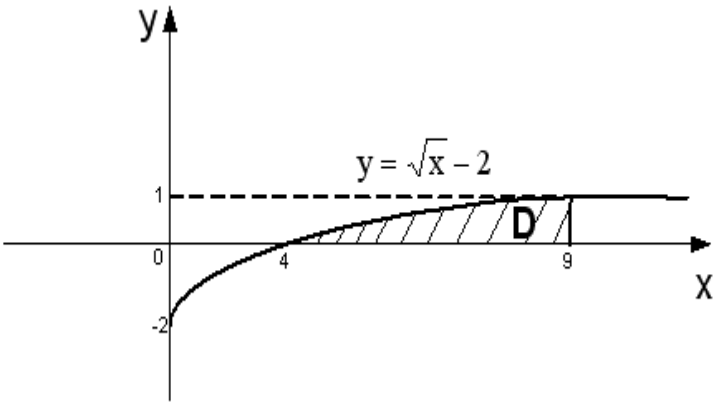
А) $\int_{-3}^{0}x^2dx$

Б) $\int_{-3}^{3}(9-x^2)dx$

В) $\int_{-3}^{0}(9-x^2)dx$

Г) $\int_{0}^{9}(9-x^2)dx$

12. Площадь криволинейной трапеции *D* определяется интегралом …



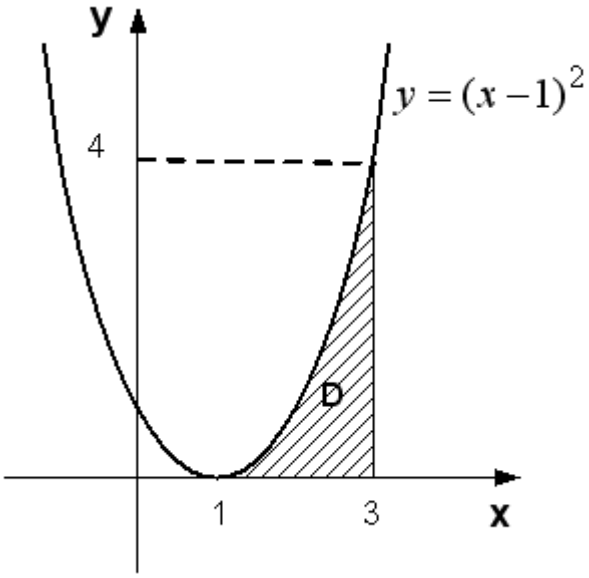
А) $\int_{0}^{1}(\sqrt{x}-2)dx$

Б) $\int_{4}^{9}(\sqrt{x}-2)dx$

В) $\int_{0}^{9}(\sqrt{x}-2)dx$

Г) $\int_{-2}^{1}(\sqrt{x}-2)dx$

13. Площадь криволинейной трапеции *D* определяется интегралом …



А) $\int_{3}^{4}(x-1)^2dx$

Б) $\int_{1}^{3}(x-1)^2dx$

В) $\int_{0}^{3}(x-1)^2dx$

Г) $\int_{0}^{4}(x-1)^2dx$

Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной заданными линиями (предварительно построить эту фигуру).

14. $y=0{,}5x^2-2x+3,\quad y=7-x$

15. $y=(x-2)^2,\quad y=4-x^2$

16. $y=x^2-3x+4,\quad y=x+1$

17 $y=x^2-2x+2,\quad y=2+4x-x^2$

18. $y=\frac{1}{2}x^2,\quad y=x+4$

19 $y=\frac{1}{2}x^2,\quad y=8$

20. $y=0{,}5x^2-2x+3,\quad y=0,\quad x=0,\quad x=4$

3.4Теоретический материал

Определение. Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функцию и производные (или дифференциалы) этих функций. Если независимая переменная одна, то уравнение называется обыкновенным; если же независимых переменных две или больше, то уравнение называется уравнением в частных производных.

Алгоритм решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными

1. Выразить производную функции через дифференциалы dx и dy.

2. Члены с одинаковыми дифференциалами перенести в одну сторону равенства и вынести дифференциал за скобку.

3. Разделить переменные.

4. Проинтегрировать обе части равенства и найти общее решение.

5. Если заданы начальные условия, то найти частное решение.

Пример. Решить уравнение $x(y^2 - 1)dx + y(x^2 + 1) = 0$

Решение:

Разделим все члены уравнения на произведение $(x^2 + 1)(y^2 - 1)$, получим

$$\frac{xdx}{x^1 + 1} + \frac{ydy}{y^2 - 1} = 0$$

Теперь обе переменные разделены. Интегрируя, находим

$$\int \frac{xdx}{x^2 + 1} + \int \frac{ydy}{y^2 - 1} = C$$

$$\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2}\ln(y^2 - 1) = \frac{1}{2}\ln C$$

Здесь произвольная постоянная C_1 заменена на $\frac{1}{2}\ln C$ (поскольку любое положительное или отрицательное число может быть представлено как натуральный логарифм другого положительного числа $|C|$).

Сокращая все члены равенства на $\frac{1}{2}$, получим

$\ln(x^2 + 1)(y^2 - 1) = \ln C$, откуда $(x^2 + 1)(y^2 - 1) = C$.

Это и есть общий интеграл или общее решение дифференциального уравнения.

Алгоритм решения линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

Определение. Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$y'' + py' + qy = f(x)$,

где p и q – постоянные величины, а f(x) – непрерывная функция x.

Если правая часть уравнения равна нулю, т.е.

$y'' + py' + qy = 0$, то оно называется однородным уравнением.

Для практического использования алгоритм решения таких уравнений удобно оформить в виде таблицы:

Дифференциальное уравнение

$y'' + py' + qy = 0$

Характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = 0$

Дискриминант $D = p^2 - 4q$ $D > 0$ $D = 0$ $D < 0$

Корни характеристического

уравнения $k_1 \neq k_2 k1 = k_2$ $k_1 = a + bi$

$k_2 = a - bi$

Множества решений $y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$ $y = c_1 e^{kx} + c_2 e^{kx}$ $y = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)$

Пример. Решить уравнение $y'' + 2y' - 8y = 0$.

Решение.

Составим характеристическое уравнение $k^2 + 2k - 8 = 0$.

$D = p^2 - 4q = 22 - 4(-8) = 4 + 32 = 36 > 0$.

Следовательно, характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня. Определим их: $k_1 = -4$, $k_2 = 2$.

Общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{2x}$$

УПРАЖНЕНИЯ

Найти общее решение дифференциального уравнения

1) $y' = 6x^3$; 2) $y'' + y' - 6y = 0$

3) $y' = 8x^2$; 4) $y'' - 6y + 9 = 0$

5) $y' = 3^{x+y}$; 6) $y'' - 2y' - 8y = 0$.

7) $yy' + x = 0$; 8) $y'' - 8y + 16 = 0$

9) $\frac{dy}{x-1} = \frac{dx}{y-4}$; 10) $y''-3y = 0$

11) $y' = 5x$; 12) $y'' - 3y' + 2y = 0$.

13) $y' = x^2 + x$; 14) $y'' + 4y = 0$.

15) $y' = x^3 + 1$; 16) $y'' - 8y + 15y = 0$

17) $y' = 8x^3$; 18) $y'' - 6y' + 5y = 0$;

19) $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$ 20) $y'' - 4y' + 13y = 0$.

3.5Теоретический материал

Определение. Числовым рядом называется выражение вида

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n ,$$

где числа $a_1, a_2, ...$ – называются членами ряда, член a_n – общим членом ряда.

Суммы конечного числа членов ряда: $S_2 = a_1 + a_2$; $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$; $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ называются частичными суммами ряда. Так как число членов ряда бесконечно, то частичные суммы ряда образуют бесконечную последовательность частичных сумм $S_1, S_2, ..., S_n, ...$.

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется сходящимся, если последовательность его частичных сумм $S_1, S_2, ..., S_n, ...$ при nстремящемся к ∞ имеет конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S .$$

Число S в этом случае называется суммой ряда.

Если же последовательность частичных сумм $S_1, S_2, ..., S_n, ...$ при nстремящемся к ∞ конечного предела не имеет, то ряд называется расходящимся.

Необходимый признак сходимости ряда. Если ряд сходится, то общий член ряда a_n при неограниченном увеличении номера n стремится к нулю, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Достаточный признак расходимости ряда.

Если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$,то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами

Признак сравнения. Пусть даны два ряда с неотрицательными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и для всех n выполняется неравенство $a_n \le b_n$, то из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

При исследовании рядов на сходимость и расходимость по этому признаку, для сравнения часто используются:

1. Ряд геометрической прогрессии $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n$, *(a>0),* который сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \ge 1$.

2. Гармонический ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ являющийся расходящимся всегда;

3. Обобщенно – степенной ряд $1 + \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^q} + \ldots \frac{1}{n^q} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$, который сходится при $q > 1$ и расходится при $q \le 1$.

Признак Даламбера. Пусть дан ряд с положительными членами $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и существует $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, тогда при $l<1$ ряд сходится, при $l>1$ – расходится.

Замечание. При $l=1$, ряд может как сходиться, так и расходиться. В этом случае необходимо дополнительное исследование ряда с помощью признака сравнения или других признаков.

Признак Коши. Пусть дан ряд с положительными членами

$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и существует $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, тогда при $l<1$ ряд сходится, при $l>1$ – расходится, при $l=1$ требуются дополнительные исследования.

Интегральный признак. Пусть дан ряд $f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(n) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, члены которого являются значениями некоторой функции $f(x)$, положительной, непрерывной и убывающей на полуинтервале $[1; +\infty)$. Тогда если несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$; если же $\int_1^{+\infty} f(x)$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ так же расходится.

Знакочередующиеся ряды

Определение. Ряд с членами произвольных знаков называется знакопеременным.

Определение. Знакопеременный ряд называется знакочередующимся, если положительные и отрицательные члены следуют друг за другом поочередно

$$a_1 - a_2 + ... + (-1)^{n+1} a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n .$$

Приведем достаточный признак сходимости знакочередующегося ряда.

Признак сходимости Лейбница. Если абсолютные величины членов знакочередующегося ряда $a_1 - a_2 + ... + (-1)^{n+1} a_n + ...$ монотонно убывают: $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n \ge ...$ и общий член ряда стремится к нулю: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд сходится.

Абсолютная и условная сходимости рядов

Возьмем знакопеременный ряд $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где числа $a_1, a_2, a_3, ..., a_n ...$ могут быть как положительными, так и отрицательными, причем их расположение в ряде произвольно.

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов этого ряда $|a_1| + |a_2| + |a_3| + ... + |a_n| + ... = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Определение. Знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд , составленный из модулей его членов $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Определение. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, а сам знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то он называется условно сходящимся.

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ является рядом с положительными членами, то для исследования вопроса о его сходимости можно применять рассмотренные раннее признаки сходимости: признаки сравнения, Даламбера, интегральный и др.

Пример 1. Составить формулу общего члена числового ряда: $-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{36}+\frac{1}{64}\ldots$

Решение. Во-первых, данный ряд является знакочередующимся, причём первый множитель является отрицательным. Поэтому формула общего члена ряда должна содержать множитель $(-1)^n$. Во-вторых, все члены ряда представляют собой дроби со знаменателем, равным единице. В-третьих, знаменатели каждой дроби являются квадратами последовательных натуральных чётных чисел: $4=2^2, 16=4^2, 36=6^2$ и так далее. Таким образом, получим формулу: $a_n=\frac{(-1)^n}{(2n)^2}$.

Пример 2. Найти 8-й член числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} tg\frac{\pi n}{6}$.

Решение. $a_8=tg\frac{\pi\cdot 8}{6}=tg\frac{4\pi}{3}=\sqrt{3}$.

Пример 3. Найти частичную сумму S_5 числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n+1}$.

Решение. $S_5=\sum_{n=1}^{5} a_n=\frac{2}{2}+\frac{4}{3}+\frac{6}{4}+\frac{8}{5}+\frac{10}{6}=7\frac{1}{10}$.

Пример 4. Исследовать на сходимость числовые ряды:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-4}{n+1}$.

Решение. Проверим сначала для данного ряда выполнения необходимого условия сходимости: $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-4}{n+1}=3\neq 0$. Предел общего члена ряда не равен нулю, следовательно, данный ряд является расходящимся.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$.

Решение. Данный ряд относится к типу обобщённых гармонических рядов $\frac{1}{n^p}$, причём $p=\frac{2}{3}<1$, значит, ряд расходится.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2-1}$.

Решение. Используем признак Даламбера. Найдём $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Здесь $a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2-1}$. Получим: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2-1}:\frac{2^n}{n^2-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n^2-1)}{n^2+2n}=2>1$. Согласно признаку Даламбера, данный ряд расходится.

Пример 5.Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{5n+2}\right)^n$ на сходимость.

Решение. Применим признак Коши: $a_n=\left(\frac{3n+1}{5n+2}\right)^n$.

$$l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n+1}{5n+2}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{5n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}{n\left(5+\frac{2}{n}\right)}=\frac{3}{5}.$$

Так как $l=\frac{3}{5}<1$, то по признаку Коши ряд сходится.

Пример 6. Исследовать ряд на абсолютную или условную сходимость:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}.$$

Решение. Составим ряд из модулей: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - это гармонический ряд, он расходится. Для исследования на сходимость исходного знакочередующегося ряда применим признак Лейбница: $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>...\frac{1}{n}>$ - первое условие выполнено; $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ - второе условие выполнено.

Таким образом , по признаку Лейбница ряд сходится.

Так как ряд из модулей расходится, а сам знакочередующийся ряд сходится, значит, он сходится условно.

УПРАЖНЕНИЯ

1.Составить формулу общего члена числового ряда:

1. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ 2. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$ 3. $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots$

1. Найти пятый член числового ряда:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi n}{4}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{4}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty}tg\left(\frac{\pi}{4}(2n-1)\right)$
4. $\sum_{n=1}^{\infty}ctg\left(\frac{\pi}{6}(2n-1)\right)$
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi}{6}(2n-1)\right)$
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi}{3}(2n-1)\right)$

2. Найти частичную сумму S_3 числового ряда:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+3}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{4n-3}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2n-1}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} n}{n+1}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^2-1}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3n+1}$

3. Исследовать на сходимость числовые ряды:

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-4}{2n+6}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{6^n}$

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-4n+1}{2n^2+n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-4n-1}{n^2+4n-1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4^n}$

4. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-n+3}{n^2+2n+5}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{6^n}$

5. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+3}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$

6. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-4n+1}{2n^2+n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^5}}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5^n}$

3.6Теоретическийматериал

Рассмотрим некоторую функцию $y=f(x)$, которая определена по крайне мере на промежутке $[-\pi,\pi]$. Если данная функция интегрируема на отрезке $[-\pi,\pi]$, то её можно разложить в тригонометрический **ряд Фурье**:

$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, где a_0, a_n, b_n – так называемые *коэффициенты Фурье*.

При этом число $T=2\pi$ называют **периодом разложения**, а число $l=\frac{T}{2}=\pi$ – **полупериодом разложения**.

Очевидно, что в общем случае ряд Фурье состоит из синусов и косинусов:

$\cos x, \cos 2x, \cos 3x, \cos 4x, \cos 5x, \ldots$

$\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \sin 4x, \sin 5x, \ldots$

Действительно, распишем его подробно:

$$\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+(a_3\cos 3x+b_3\sin 3x)+\ldots+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+\ldots$$

Нулевой член ряда принято записывать в виде $\frac{a_0}{2}$.

Коэффициенты Фурье рассчитываются по следующим формулам:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx$$

<u>Пример</u>

Разложить функцию $f(x)=x+1$ в ряд Фурье на промежутке $[-\pi,\pi]$.

Решение:

В данной задаче период разложения $T=2\pi$, полупериод $l=\pi$.

Разложим функцию $f(x)=x+1$ в ряд Фурье на промежутке $[-\pi,\pi]$:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

Используя соответствующие формулы, найдём *коэффициенты Фурье*. Теперь нужно составить и вычислить три **определенных интеграла.**

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)dx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}+\pi-\left(\frac{(-\pi)^2}{2}-\pi\right)\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}+\pi-\left(\frac{\pi^2}{2}-\pi\right)\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}+\pi-\frac{\pi^2}{2}+\pi\right)=\frac{1}{\pi}\cdot 2\pi=2$$

2) Используем вторую формулу:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)\cos nxdx=(*)$$

$$u=x+1\Rightarrow du=dx$$

$$dv=\cos nxdx\Rightarrow v=\int\cos nxdx=\frac{1}{n}\int\cos nxd(nx)=\frac{1}{n}\sin nx$$

В рассматриваемом задании сподручнее сразу использовать <u>формулу интегрирования по частям в определённом интеграле</u> $\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$:

$$(*)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}(x+1)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\cdot\left[(\pi+1)\sin\pi n-(-\pi+1)\sin(-\pi n)\right]-\frac{1}{n}\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)\cdot\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)=$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\cdot(0-0)+\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\left(0+\frac{1}{n^2}(\cos\pi n-\cos(-\pi n))\right)=\frac{1}{\pi n^2}(\cos\pi n-\cos\pi n)=0$$

3) Ищем третий коэффициент Фурье:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)\sin nxdx=(*)$$

$$u=x+1\Rightarrow du=dx$$

$$dv=\sin nxdx\Rightarrow v=\int\sin nxdx=\frac{1}{n}\int\sin nxd(nx)=-\frac{1}{n}\cos nx$$

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

$$(*)\overset{(1)}{=}\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}(x+1)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx\right)\overset{(2)}{=}$$

$$=-\frac{1}{\pi n}\cdot\left[(\pi+1)\cos\pi n-(-\pi+1)\cos(-\pi n)\right]+\frac{1}{\pi n}\cdot\frac{1}{n}(\sin nx)\Big|_{-\pi}^{\pi}\overset{(3)}{=}$$

$$=-\frac{1}{\pi n}\cdot\left[(\pi+1)(-1)^n-(-\pi+1)(-1)^n\right]+\frac{1}{\pi n^2}\cdot(\sin\pi n-\sin(-\pi n))\overset{(4)}{=}$$

$$=-\frac{1}{\pi n}\cdot\left[\pi+1+\pi-1\right]\cdot(-1)^n+\frac{1}{\pi n^2}\cdot(0-0)\overset{(5)}{=}-\frac{1}{\pi n}\cdot 2\pi\cdot(-1)^n+0=-\frac{2\pi\cdot(-1)^n}{\pi n}=-\frac{2\cdot(-1)^n}{n}$$

Подставим их в формулу $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$:

$$f(x)\sim\frac{2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(0\cdot\cos nx-\frac{2\cdot(-1)^n}{n}\cdot\sin nx\right)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2\cdot(-1)^n}{n}\cdot\sin nx\right)=1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin nx}{n}$$

Таким образом, мы получили разложение функции $f(x)=x+1$ в ряд Фурье на промежутке $[-\pi,\pi]$:

$$f(x)\sim 1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin nx}{n}$$

Разложить в ряд Фурье функцию ,y=x-1 заданную на отрезке $[-\pi,\pi]$.

5.Основы теории вероятности и математической статистики

5.1Теоретический материал

Рассматривается эксперимент *E*. Предполагается, что его можно проводить неоднократно. В результате эксперимента могут появляться различные события, составляющие некоторое множество *F*. Наблюдаемые события разделяются на три вида: достоверное, невозможное, случайное.

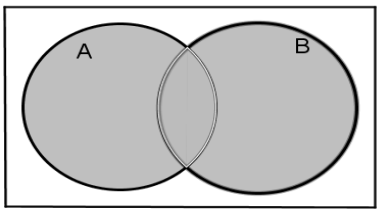
Достоверным называется событие, которое обязательно произойдет в результате проведения эксперимента *E*. Обозначается Ω.

Невозможным называется событие, которое заведомо не произойдет в результате проведения эксперимента *E*. Обозначается /E.

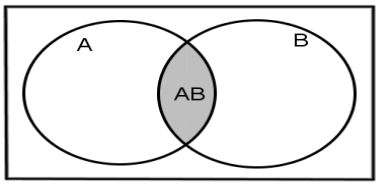
Случайным называется событие, которое может произойти или не произойти в результате эксперимента *E*.

Дополнительным (противоположным) событию *A* называется событие, обозначаемое $\bar{A}$, которое происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие *A*.

Суммой (объединением) событий называется событие, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из данных событий (рисунок 3.1). Обозначения $A+B=A\cup B$.



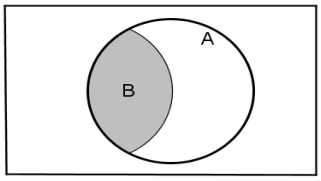
Произведением (пересечением) событий называется событие, происходящее тогда и только тогда, когда все данные события происходят вместе (одновременно) (рисунок 3.2). Обозначения $A\times B=A\mid B$. Очевидно, что события А и В ***несовместны***, если $A\times B=Æ$.



Полной группой событий называется множество событий, сумма которых есть достоверное событие:

$$A_1+A_2+\ldots+A_n=W.$$

Событие *B* называют ***частным случаем события*** *A*, если с появлением события *B* появляется и событие *A*. Говорят также, что событие *B* влечет событие *A* (Рисунок 3.3). Обозначение $B\mid A$.



События *A* и *B* называются ***эквивалентными***, если они происходят или не происходят совместно при проведении эксперимента *E*. Обозначение $A=B$. Очевидно, что $A=B$, если $A\mid B$ и $B\mid A$.

Сложным событием называют наблюдаемое событие, выраженное через другие наблюдаемые в том же эксперименте события с помощью алгебраических операций.

Вероятность осуществления того или иного сложного события вычисляют с помощью формул сложения и умножения вероятностей.

Теорема сложения вероятностей

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$. (5.1)

Следствия:

1) в случае, если события *A* и *B* несовместны, теорема сложения приобретает вид:

$P(A+B)=P(A)+P(B)$; (5.2)

2) в случае трех слагаемых теорема сложения записывается в виде

$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-$

$-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$; (3.3)

3) сумма вероятностей взаимно противоположных событий равна 1:

$P(A)+P(\bar{A})=1$. (3.4)

Вероятность появления события *A* при условии, что событие *B* произошло, называют ***условной вероятностью*** и обозначают $P(A|B)$ или $P_B(A)$.

A и *B* – ***зависимые события***, если $P(A|B)\neq P(A)$.

A и *B* – ***независимые события***, если $P(A|B)=P(A)$.

Теорема умножения вероятностей

$P(A\times B)=P(A)\times P(B|A)=P(B)\times P(A|B)$. (3.5)

Следствия:

1) для независимых событий *A* и *B*

$P(A\times B)=P(A)\times P(B)$; (3.6)

2) в общем случае для произведения трех событий теорема умножения вероятностей имеет вид:

$P(A\times B\times C)=P(A)\times P(B|A)\times P(C|A\times B)$. (3.7)

Пример 1 - В электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающие независимо друг от друга. Вероятности отказов первого, второго и третьего элементов соответственно равны $p_1=0{,}1$, $p_2=0{,}15$, $p_3=0{,}2$. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.

Решение

Первый способ.

Обозначим события: A_1, A_2, A_3- в цепи произошел отказ соответственно первого, второго и третьего элементов.

Событие A – тока в цепи не будет (откажет хотя бы один из элементов, так как они включены последовательно).

Событие $\bar{A}$- в цепи ток (работают три элемента), $\bar{A} = \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$. Вероятность противоположных событий связана формулой (3.4). Событие $\bar{A}$ представляет собой произведение трех событий, являющихся попарно независимыми. По теореме умножения вероятностей независимых событий получаем

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) =$$

$$= (1 - P(A_1))(1 - P(A_2))(1 - P(A_3)) =$$

$$= (1 - 0{,}1)(1 - 0{,}15)(1 - 0{,}2) = 0{,}9 \times 0{,}85 \times 0{,}8 = 0{,}612.$$

Тогда вероятность искомого события $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0{,}612 = 0{,}388$.

Второй способ.

С учетом принятых ранее обозначений запишем искомое событие A – откажет хотя бы один из элементов:

$$A = A_1 + A_2 + A_3.$$

Так как слагаемые, входящие в сумму, совместны, следует применить теорему сложения вероятностей в общем виде для случая трех слагаемых (3.3):

$$P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) -$$

$$- P(A_1 \times A_2) - P(A_1 \times A_3) - P(A_2 \times A_3) + P(A_1 \times A_2 \times A_3) =$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1) \times P(A_2) - P(A_1) \times P(A_3) - P(A_2) \times P(A_3) +$$

$$+ P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3) = 0{,}1 + 0{,}15 + 0{,}2 - 0{,}1 \times 0{,}15 - 0{,}1 \times 0{,}2 - 0{,}15 \times 0{,}2 +$$

$$+ 0{,}1 \times 0{,}15 \times 0{,}2 = 0{,}45 - 0{,}015 - 0{,}02 - 0{,}03 + 0{,}003 = 0{,}388.$$

Ответ: 0,388.

УПРАЖНЕНИЯ

1 В читальном зале имеется шесть учебников по теории вероятностей, из которых три в переплете. Библиотекарь наудачу взял два учебника. Найти вероятность того, что оба учебника окажутся в переплете.

2 В мешке смешаны нити, среди которых 30 % белых, а остальные –красные. Определить вероятности того, что вынутые наудачу две нити будут: одного цвета; разных цветов.

3 Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы за определенный промежуток времени первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятности того, что за это время безотказно будут работать: только один элемент; только два элемента; все три элемента; хотя бы два элемента.

4 Брошены три игральные кости. Найти вероятности следующих событий:

а) на каждой грани из выпавших появится пять очков;

б) на всех выпавших гранях появится одинаковое число очков;

в) на двух выпавших гранях появится одно очко, а на третьей грани – другое число очков;

г) на всех выпавших гранях появится разное число очков.

5 Вероятность попадания в мишень стрелком при одном выстреле равна 0,8. Сколько выстрелов должен произвести стрелок, чтобы с вероятностью, меньшей 0,4, можно было ожидать, что не будет ни одного промаха?

6 Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 сначала выбирается одна, а затем из оставшихся четырех – вторая цифра. Предполагается, что все 20 возможных исходов равновероятны. Найти вероятность того, что будет выбрана нечетная цифра: в первый раз; во второй раз; в оба раза.

7 Вероятность того, что в мужской обувной секции магазина очередной раз будет продана пара обуви 46-го размера, равна 0,01. Сколько должно быть продано пар обуви в магазине, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,9, можно было ожидать, что будет продана хотя бы одна пара обуви 46-го размера?

8 В ящике 10 деталей, среди которых две нестандартные. Найти вероятность того, что в наудачу отобранных шести деталях окажется не более одной нестандартной.

9 Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие нестандартно, равна 0,1. Найти вероятность того, что:

а) из трех проверенных изделий только два окажутся нестандартными;

б) нестандартным окажется только четвертое по порядку проверенное изделие.

10 32 буквы русского алфавита написаны на карточках разрезной азбуки:

а) три карточки вынимают наугад одну за другой и укладывают на стол в порядке появления. Найти вероятность того, что получится слово «мир»;

б) извлеченные три карточки можно поменять местами произвольным образом. Какова вероятность того, что из них можно сложить слово «мир»?

5.2Теоретический материал

Величина называется случайной, если она принимает свои значения в зависимости от исходов некоторого испытания (опыта), причем для каждого элементарного исхода она имеет единственное значение
Случайная величина называется дискретной, если множество всех возможных значений ее конечно.

Непрерывной случайной величиной называется такая случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка

Закон распределения дискретной случайной величины это перечень всех её возможных значений и соответствующих вероятностей.

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	P_n

Сумма вероятностей $\Sigma p_i = 1$.
Закон распределения также может быть задан аналитически (формулой) и графически многоугольником распределения, соединяющим точки (x_i; p_i)

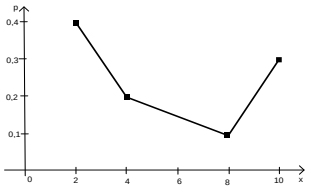
Пример: Табличный закон:

x_i	2	4	8	10
p_i	0,4	0,2	0,1	0,3

$\Sigma p_i = 0{,}4+0{,}2+0{,}1+0{,}3=1$

Графическое изображение ряда распределения называется многоугольником распределения. Строится он так: для каждого возможного значения с. в. восстанавливается перпендикуляр к оси абсцисс, на котором откладывается вероятность данного значения с. в. Полученные точки для наглядности (и только для наглядности!) соединяются отрезками прямых.

Многоугольник распределения:



ПРИМЕР**.** Из партии, содержащей 100 изделий, среди которых имеется 10 дефектных, выбраны случайным образом пять изделий для проверки их качества. Построить ряд распределений случайного числа *X*дефектных изделий, содержащихся в выборке.

Решение. Так как в выборке число дефектных изделий может быть любым целым числом в пределах от 0 до 5 включительно, то возможные значения x_iслучайной величины *X* равны:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 3,\ x_5 = 4,\ x_6 = 5.$$

Вероятность $P(X = k)$того, что в выборке окажется ровноk(k=0, 1, 2, 3, 4, 5) дефектных изделий , равна

$$P\ (X = k) = \frac{C_{10}^{k} \cdot C_{90}^{5-k}}{C_{100}^{5}}.$$

В результате расчетов по данной формуле с точностью 0,001 получим: $p_1 = P(X = 0)$ @ 0,583; $p_2 = P(X = 1)$ @ 0,340; $p_3 = P(X = 2)$ @ 0,070; $p_4 = P(X = 3)$ @ 0,007; $p_5 = P(X = 4)$ @ 0; $p_6 = P(X = 5)$ @ 0.Используя для проверки равенство $\sum_{k=1}^{6} p_k = 1$, убеждаемся, что расчеты и округление произведены правильно (см. табл.).

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,583	0,340	0,070	0,007	0	0

Задания

1. Составьте:

1) закон распределения числа выпавших очков при бросании игральной кости;

2) функцию распределения этой случайной величины и изобразите ее графически.

2.В партии из 10 деталей 8 стандартных. Из этой партии наудачу взято 2 детали. Постройте ряд распределения числа стандартных извлеченных деталей.

3.В билете три вопроса. Вероятность того, что студент правильно ответит на один вопрос, равна 3/4. Постройте ряд распределения числа правильных ответов.

5.3Теоретический материал

Математическое ожидание дискретной случайной величины- это *средне ожидаемое значение* при многократном повторении испытаний. Пусть случайная величина X принимает значения $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ соответственно. Тогда математическое ожидание $M(X)$ данной случайной величины равно *сумме произведений* всех её значений на соответствующие вероятности:

$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \ldots + x_np_n$ или в свёрнутом виде: $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i$

Дисперсией случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

дисперсия характеризует рассеяние (разбросанность) значений случайной величины около ее математического ожидания.

Среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины, оно же стандартное отклонение или среднее квадратичное отклонение есть корень квадратный из дисперсии: σ(X) = √D(X)

<u>Пример</u>

Математическое ожидание дискретной случайной величины, заданной законом распределения

X	2	3	8
P	0,4	0,5	0,1

$M(x) = 2 \cdot 0{,}4 + 3 \cdot 0{,}5 + 8 \cdot 0{,}1 = 0{,}8 + 1{,}5 + 0{,}8 = 3{,}1$

$(M(x))^2 = 3{,}1^2 = 9{,}61$

$M(x^2) = 2^2 \cdot 0{,}4 + 3^3 \cdot 0{,}5 + 8^2 \cdot 0{,}1 = 4 \cdot 0{,}4 + 9 \cdot 0{,}5 + 64 \cdot 0{,}1 = 1{,}6 + 4{,}5 + 6{,}4 = 12{,}5$

$D(X) = 12{,}5 - 9{,}61 = 2{,}89$

$\sigma(X) = \sqrt{2{,}89} = 1{,}7$

Мистер X играет в европейскую рулетку по следующей системе: постоянно ставит 100 рублей на «красное». Составить закон распределения случайной величины X – его

выигрыша. Вычислить математическое ожидание выигрыша и округлить его до копеек. Сколько *в среднем* проигрывает игрок с каждой поставленной сотни?

***Справка**: европейская рулетка содержит 18 красных, 18 чёрных и 1 зелёный сектор («зеро»). В случае выпадения «красного» игроку выплачивается удвоенная ставка, в противном случае она уходит в доход казино*

УПРАЖНЕНИЯ

1. Математическое ожидание дискретной случайной величины, заданной законом распределения

X	2	3	8
P	0,4	0,5	0,1

равно …

А) 3,1 В) 4,5

Б) 1 Г) 13

2. Математическое ожидание дискретной случайной величины, заданной законом распределения

X	1	3	6
P	0,6	0,3	0,1

равно …

А) 3 В) 10

Б) 1 Г) 2,1

3. Математическое ожидание квадрата случайной величины, заданной законом распределения

X	-1	0	8
P	0,6	0,2	0,2

равно $M(X^2) = 13,4$, тогда дисперсия равна …

А) 14,4 В) 12,4

Б) 1 Г) 14,5

4. Математическое ожидание квадрата случайной величины, заданной законом распределения

X	-2	0	2
P	0,1	0,3	0,6

равно $M(X^2) = 2,8$, тогда дисперсия равна

А) 3,8 Б)1 В) 1,8 Г)2

5. Из 450 проведенных измерений физической величины 9 измерений были неверными, тогда относительная частота неверного измерения равна…

А) 0,02 В) 0,8

Б) 0,2 Г) 0,98

6. Отрывок из текста в 500 знаков содержит 50 букв «А». Относительная частота появления в данном тексте буквы «А» равна…

А) 0,9 В) 0,1

Б) 0,01 Г) 0,09

7. Из 20 выданных кредитов 15 выплачивают своевременно. Тогда вероятность, что очередной кредит будет выплачен во время, равна

А) 0,5 В) 0,75

Б) 0,075 Г) 0,25

8.Мистер X играет в европейскую рулетку по следующей системе: постоянно ставит 100 рублей на «красное». Составить закон распределения случайной величины X – его выигрыша. Вычислить математическое ожидание выигрыша и округлить его до копеек. Сколько *в среднем* проигрывает игрок с каждой поставленной сотни?

***Справка**: европейская рулетка содержит 18 красных, 18 чёрных и 1 зелёный сектор («зеро»). В случае выпадения «красного» игроку выплачивается удвоенная ставка, в противном случае она уходит в доход казино*

6.Основные численные методы

6.1Теоретический материал

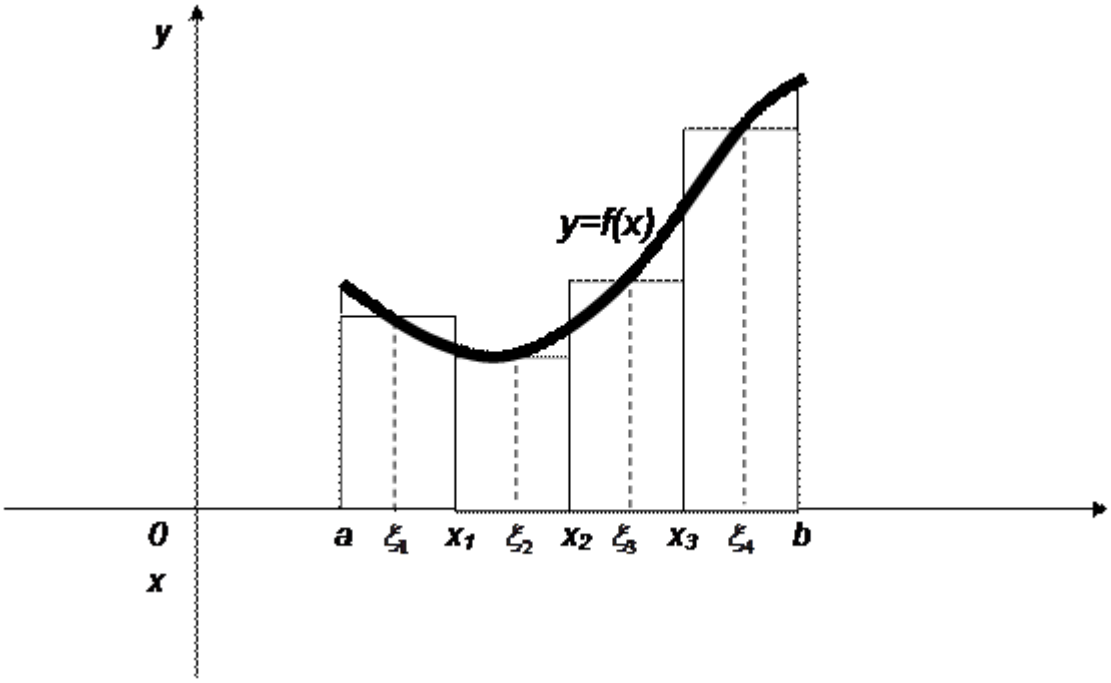
Численные методы вычисления определенных интегралов и решения обыкновенных дифференциальных уравнений являются самым важным приложением теории интегрального и дифференциального исчисления.

Большинство практических моделей исследуются именно с помощью численных методов.

Численные методы дают возможность приближенно решать многие из задач, точные решения которых аналитическими методами найдены быть не могут.

Например, для вычисления «неберущихся» интегралов (задача интегрирования) применяются формулы прямоугольников и трапеций; для решения задачи Коши обыкновенного дифференциального уравнения (задача дифференцирования) – метод Эйлера и метод Рунге-Кутта; для решения систем линейных уравнений – метод Гаусса.

На практике часто требуется вычислять определенные интегралы от функций, для которых не удается найти первообразных. В таких случаях, как правило, ограничиваются нахождением лишь приближенного значения рассматриваемого интеграла, используя формулу **прямоугольников**.



Пусть требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$. Для этого отрезок $[a;b]$ точками $x_i = a + \frac{b-a}{n} i, \quad i = 0,1,\ldots,n,$ разобьем на n равных по длине отрезков. В каждом полученном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ через ξ_i обозначим середину этого отрезка: $\xi_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}, \quad i = 1,\ldots,n$.

При достаточно большом n интегральную сумму можно принять за приближение искомого интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$$

Используя равенство $\frac{x_{i-1}+x_i}{2} = a + \frac{b-a}{n}\left(i-\frac{1}{2}\right)$, формулу прямоугольников можно записать в следующем виде:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n}\left(i-\frac{1}{2}\right)\right)$$

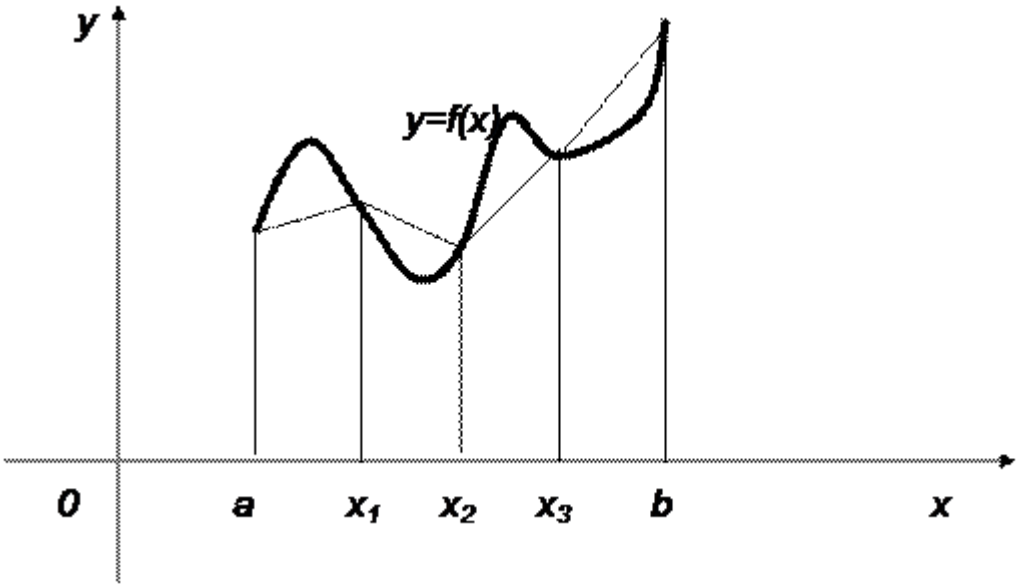
Следующая теорема дает оценку абсолютной погрешности приближения, получаемого по формуле прямоугольников.

Теорема. Если функция f(x) имеет на отрезке $[a;b]$ непрерывную вторую производную, то

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\right| \le \frac{M(b-a)^3}{24n^2},$$

где M – наибольшее значение функции $|f''(x)|$ на $[a;b]$.

Формула трапеций



Пусть, как и выше, требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Отрезок $[a;b]$ точками $x_i = a + \frac{b-a}{n} i, \quad i = 0,1,\ldots,n,$ разобьем на n равных по длине отрезков.

Тогда имеет место формула **трапеций**:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$$

Формулу трапеций можно записать в следующем виде:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n} \left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n} i \right) \right)$$

Следующая теорема дает оценку абсолютной погрешности приближения, получаемого по формуле трапеций.

Теорема. Если функция f(x) имеет на отрезке $[a;b]$ непрерывную вторую производную, то

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\right| \le \frac{M(b-a)^3}{12n^2},$$

где M – наибольшее значение функции $|f''(x)|$ на $[a;b]$.

Формула прямоугольников дает более точный результат, чем формула трапеций.

Метод Эйлера предназначен для приближенного решения задачи Коши обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которые не решаются обычными аналитическими методами, т. е.

Если $y' = f(x,y)$, где $y(x_0) = y_0$. Тогда решение принимает вид:

$y_n \approx y_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}; y_{n-1})$ с шагом h.

Решение уравнения можно представить на координатной плоскости в виде ломаной.

УПРАЖНЕНИЯ

Тема 1. Приближенные числа и действия над ними

1. При вычислении значения выражения $z = 2x - 3y$ данные в условии задачи значения $x = 19{,}8$ и $y = 9{,}9$округлили до целых и получили: $z = 2 \cdot 20 - 3 \cdot 10 = 10$. Тогда абсолютная погрешность полученного результата равна…

А) 0,7 Б) 0,2 В) 0,1 Г) 0,3

2. При вычислении значения выражения $z = 4x - 3y$ данные в условии задачи значения $x = 51$ и $y = 22$округлили до 50 и 20 соответственно, подставили в выражение и получили: $z = 4 \cdot 50 - 3 \cdot 20 = 140$. Тогда абсолютная погрешность полученного результата равна…

А) 10 Б) 3 В) 5 Г) 2

3. При вычислении значения выражения $z = 2x - 6y$ данные в условии задачи значения $x = 90{,}1$ и $y = 4{,}9$округлили до целых и получили:

$z = 2 \cdot 90 - 6 \cdot 5 = 150$. Тогда абсолютная погрешность полученного результата равна…

А) 0,6 Б) 0,8 В) 1 Г) 0,2

4. При вычислении значения выражения $z = 4x - 5y$ данные в условии задачи значения $x = 25{,}1$ и $y = 10{,}2$округлили до целых и получили:

$z = 4 \cdot 25 - 5 \cdot 10 = 50$. Тогда абсолютная погрешность полученного результата равна…

А) 0,3 Б) 1,4 В) 1,5 Г) 0,1

Тема 2. Численное интегрирование

1. Приближенное значение интеграла $\int_3^8 (x-3)dx$, вычисленное по формуле прямоугольников $\int_a^b f(x)dx \approx h(f(x_0) + f(\mathrm{x}_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4))$, где $h = 1,\ x_i = a + ih,\ i = 0,1,2,3,4$ равно …

А) 5 Б) 10 В) 25 Г) 15

2. Приближенное значение интеграла $\int_1^6 (8-x)dx$, вычисленное по формуле прямоугольников $\int_a^b f(x)dx \approx h(f(x_0) + f(\mathrm{x}_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4))$, где $h = 1,\ x_i = a + ih,\ i = 0,1,2,3,4$ равно …

А) 25 Б) 27 В) 15 Г) 20

3. Приближенное значение интеграла $\int_3^7 (11-x)dx$, вычисленное по формуле прямоугольников $\int_a^b f(x)dx \approx h(f(x_0) + f(\mathrm{x}_1) + f(x_2) + f(x_3))$, где $h = 1,\ x_i = a + ih,\ i = 0,1,2,3$ равно …

А) 22 Б) 30 В) 18 Г) 264

4. Приближенное значение интеграла $\int_0^4 (5-x)dx$, вычисленное по формуле прямоугольников $\int_a^b f(x)dx \approx h(f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+f(x_3))$, где $h=1,\ x_i=a+ih,\ i=0,1,2,3$ равно …

А) 14 Б) 15 В) 6 Г) 4

5. Приближенное значение интеграла $\int_3^8 (x-3)dx$, вычисленное по формуле прямоугольников $\int_a^b f(x)dx \approx h(f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4))$, где $h=1,\ x_i=a+ih,\ i=0,1,2,3,4$ равно …

А) 5 Б) 10 В) 25 Г) 15

6. Для приближенного вычисления определенного интеграла от функции $y=\frac{1}{x^3+1}$ на интервале $[1;2]$ можно воспользоваться формулой трапеций $\int_a^b y\,dx \approx \frac{b-a}{n}\cdot\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right)$. Интервал $[1;2]$ разбили на 4 равные части и вычислили соответствующие приближенные значения $\frac{1}{x^3+1}$.

x	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00
y	0,50	0,34	0,23	0,16	0,11

Тогда $\int_1^2 \frac{1}{x^3+1}\,dx \approx \cdots$

А) 0,26 Б) 1,86 В) 0,11 Г) 2,23

7. Для приближенного вычисления определенного интеграла от функции $y=\frac{\sin x}{x^2+1}$ на интервале $[0;1]$ можно воспользоваться формулой трапеций $\int_a^b y\,dx \approx \frac{b-a}{n}\cdot\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right)$. Интервал $[0;1]$ разбили на 4 равные части и вычислили соответствующие приближенные значения $\frac{\sin x}{x^2+1}$.

x	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
y	0,00	0,23	0,38	0,44	0,42

Тогда $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^2+1}dx \approx \cdots$

А) 0,22 Б) 8,12 В) 0,32 Г) 1,34

8. Для приближенного вычисления определенного интеграла от функции $y = e^{-x^3}$ на интервале $[0;1]$ можно воспользоваться формулой трапеций $\int_a^b y\,dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right)$. Интервал $[0;1]$ разбили на 4 равные части и вычислили соответствующие приближенные значения e^{-x^3}.

x	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
y	1,00	0,98	0,88	0,66	0,37

Тогда $\int_0^1 e^{-x^3}\,dx \approx \cdots$

А) 0,80 Б) 1,80 В) 0,08 Г) 2,08

9. Для приближенного вычисления определенного интеграла от функции $y = \cos(x^2)$ на интервале $[0;1]$ можно воспользоваться формулой трапеций $\int_a^b y\,dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right)$. Интервал $[0;1]$ разбили на 4 равные части и вычислили соответствующие приближенные значения $\cos(x^2)$.

x	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
y	1,00	1,00	0,97	0,85	0,54

Тогда $\int_0^1 \cos(x^2)\,dx \approx \cdots$

А) 0,36 Б) 1,27 В) 0,90 Г) 3,59

Тема 3. Численное дифференцирование

1. Некоторая функция $y = f(x)$ задана в виде таблицы

x_i	0	1	2
y_i	7,2	7,9	8,9

Если требуется найти значение производной данной функции в некоторой точке, то можно заменить данную, аналитическая запись которой неизвестна, некоторой другой функцией $y = \varphi(x)$, для которой $\varphi(x) \approx f(x)$, и найти производную функции $y = \varphi(x)$. Если шаг таблицы h(разность между соседними значениями x) является величиной постоянной, то можно воспользоваться формулой

$$\varphi(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1} t + \frac{\Delta^2 y_0}{1 \cdot 2} t(t-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{1 \cdot 2 \cdot 3} t(t-1)(t-2) + \cdots,$$

где $t = \frac{x - x_0}{h}$ и $\Delta^i y_0 = \Delta^{i-1} y_1 - \Delta^{i-1} y_0$

Вычисления производите с двумя знаками после запятой. Для заданной в виде таблицы функции $y = f(x)$ значение $f'(0{,}1) \approx \cdots$

А) 0,70 Б) 0,58 В) 1,43 Г) 0,06

2. Некоторая функция $y = f(x)$ задана в виде таблицы

x_i	0	1	2
y_i	2,4	2,8	3,4

Если требуется найти значение производной данной функции в некоторой точке, то можно заменить данную, аналитическая запись которой неизвестна, некоторой другой функцией $y = \varphi(x)$, для которой $\varphi(x) \approx f(x)$, и найти производную функции $y = \varphi(x)$. Если шаг таблицы h(разность между соседними значениями x) является величиной постоянной, то можно воспользоваться формулой

$$\varphi(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1} t + \frac{\Delta^2 y_0}{1 \cdot 2} t(t-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{1 \cdot 2 \cdot 3} t(t-1)(t-2) + \cdots,$$

где $t = \frac{x - x_0}{h}$ и $\Delta^i y_0 = \Delta^{i-1} y_1 - \Delta^{i-1} y_0$

Вычисления производите с двумя знаками после запятой. Для заданной в виде таблицы функции $y = f(x)$ значение $f'(0{,}2) \approx \cdots$

А) -0,54 Б) 0,34 В) 0,46 Г) 0,40

3. Некоторая функция $y = f(x)$ задана в виде таблицы

x_i	0	1	2
y_i	5,1	4,6	4,0

Если требуется найти значение производной данной функции в некоторой точке, то можно заменить данную, аналитическая запись которой неизвестна, некоторой другой функцией $y = \varphi(x)$, для которой $\varphi(x) \approx f(x)$, и найти производную функции $y = \varphi(x)$. Если шаг таблицы h(разность между соседними значениями x) является величиной постоянной, то можно воспользоваться формулой

$$\varphi(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1} t + \frac{\Delta^2 y_0}{1 \cdot 2} t(t-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{1 \cdot 2 \cdot 3} t(t-1)(t-2) + \cdots,$$

где $t = \frac{x-x_0}{h}$ и $\Delta^i y_0 = \Delta^{i-1} y_1 - \Delta^{i-1} y_0$

Вычисления производите с двумя знаками после запятой. Для заданной в виде таблицы функции $y = f(x)$ значение $f'(0{,}2) \approx \cdots$

А) -0,53 Б) -0,50 В) -0,47 Г) 0,40

4. Некоторая функция $y = f(x)$ задана в виде таблицы

x_i	0	1	2
y_i	3,2	3,8	4,7

Если требуется найти значение производной данной функции в некоторой точке, то можно заменить данную, аналитическая запись которой неизвестна, некоторой другой функцией $y = \varphi(x)$, для которой $\varphi(x) \approx f(x)$, и найти производную функции $y = \varphi(x)$. Если шаг таблицы h(разность между соседними значениями x) является величиной постоянной, то можно воспользоваться формулой

$$\varphi(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1} t + \frac{\Delta^2 y_0}{1 \cdot 2} t(t-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{1 \cdot 2 \cdot 3} t(t-1)(t-2) + \cdots,$$

где $t = \frac{x-x_0}{h}$ и $\Delta^i y_0 = \Delta^{i-1} y_1 - \Delta^{i-1} y_0$

Вычисления производите с двумя знаками после запятой. Для заданной в виде таблицы функции $y = f(x)$ значение $f'(0{,}1) \approx \cdots$

А) 0,60 Б) 0,01 В) 0,76 Г) 0,44

Тема 4. Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений

1. Для приближенного решения дифференциального уравнения $y' = f(x; y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$ можно воспользоваться методом Эйлера: $y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k; y_k)$. Тогда для уравнения $y' = 2x + 4y$ при начальном условии $y(0) = 1$ с шагом $h = 0{,}1$ значение $y(0{,}2)$ с точностью до сотых равно…

А) 0,02 Б) 1,40 В) 1,98 Г) 1,08

2. Для приближенного решения дифференциального уравнения $y' = f(x; y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$ можно воспользоваться методом Эйлера: $y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k; y_k)$. Тогда для уравнения $y' = 2x^2 + 3y^2$ при начальном условии $y(0) = 1$ с шагом $h = 0{,}1$ значение $y(0{,}2)$ с точностью до сотых равно…

А) 2,11 Б) 1,81 В) 1,30 Г) 0,52

3. Для приближенного решения дифференциального уравнения $y' = f(x; y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$ можно воспользоваться методом Эйлера: $y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k; y_k)$. Тогда для уравнения $y' = 2x + y$ при начальном условии $y(0) = 1$ с шагом $h = 0{,}1$ значение $y(0{,}2)$ с точностью до сотых равно…

А) 1,23 Б) 1,11 В) 1,20 Г) 0,99

4. Для приближенного решения дифференциального уравнения $y' = f(x; y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$ можно воспользоваться методом Эйлера: $y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k; y_k)$. Тогда для уравнения $y' = 2y + x$ при начальном условии $y(0) = 5$ с шагом $h = 0{,}1$ значение $y(0{,}2)$ с точностью до десятых равно…

А) 3,61 Б) 4,85 В) 1,60 Г) 2,80

Список рекомендуемой литературы

Основные источники:

1.Баврин, И. И. Математика : учебник и практикум для СПО / И. И. Баврин. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 616 с. — (Серия : Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-04101-9. Режим доступа: https://biblio-online.ru/

2.Баврин, И. И. Дискретная математика. Учебник и задачник : для СПО / И. И. Баврин. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 209 с. — (Серия : Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-01595-9. Режим доступа: https://biblio-online.ru/

2.Зенков, А. В. Численные методы : учебное пособие для СПО / А. В. Зенков. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 122 с. — (Серия : Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-04268-9. Режим доступа: https://biblio-online.ru/

Дополнительные источники:

1.Ляув Н.А. Методические рекомендации по организации практических занятий по дисциплине «Математика» для студентов 2 курса специальности 23.02.01 Организация перевозок и управление на транспорте (по видам). ТТЖТ, 2017г. http://tihtgt.ru

2.Ляув Н.А Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающимися по дисциплине «Математика» для студентов специальности 23.02.01 Организация перевозок и управление на транспорте (по видам) 2 курса. ТТЖТ, 2017г. http://tihtgt.ru

3. Олейник Е.А.. Методические рекомендации для организации самостоятельной работы по дисциплине Математика для студентов 2 курса специальности 23.02.01 Организация перевозок и управление на транспорте (по видам) ТТЖТ, 2017г. http://tihtgt.ru

Интернет – ресурсы: «Электронные ресурсы ТТЖТ»: http://tihtgt.ru